COLLÈGE
ANDRÉ-GRASSET

Une approche en spirale du calcul différentiel

Paul Guertin

9 juin 2022

Colloque 2022 de l'AQPC
Collège Montmorency

Question 1 de l'examen final en NYA

Dans ce cours, nous avons appris à dériver une fonction. À quoi cela peut-il servir de calculer la dérivée d'une fonction ?

Question 1 de l'examen final en NYA

Dans ce cours, nous avons appris à dériver une fonction. À quoi cela peut-il servir de calculer la dérivée d'une fonction ?

Réponse modale : « La dérivée sert à simplifier une fonction. »

Le problème

Les idées simples et élégantes du calcul différentiel sont cachées derrière une notation algébrique que les étudiants ne maîtrisent pas lorsqu'il arrivent.

Le problème

Les idées simples et élégantes du calcul différentiel sont cachées derrière une notation algébrique que les étudiants ne maîtrisent pas lorsqu'il arrivent.

Le réflexe des profs : faire des « rappels ».

Le problème

Les idées simples et élégantes du calcul différentiel sont cachées derrière une notation algébrique que les étudiants ne maîtrisent pas lorsqu'il arrivent.

Le réflexe des profs : faire des « rappels ».

La perception des étudiants : le calcul différentiel, c'est rien que des règles d'algèbre.

Le problème

Les idées simples et élégantes du calcul différentiel sont cachées derrière une notation algébrique que les étudiants ne maîtrisent pas lorsqu'il arrivent.

Le réflexe des profs : faire des « rappels ».

La perception des étudiants : le calcul différentiel, c'est rien que des règles d'algèbre.

La conséquence : le calcul différentiel n'est plus le sujet principal du cours de calcul différentiel.

Mon expérience d'étudiant en calcul différentiel

Table des matières de mon manuel :

- Rappels d'algèbre : 60 pages
- Calcul des limites : 90 pages
- Continuité : 30 pages
- Calcul des dérivées : 90 pages
- Applications des dérivées : 80 pages

Mon expérience d'étudiant en calcul différentiel

Table des matières de mon manuel :

- Rappels d'algèbre : 60 pages
- Calcul des limites : 90 pages
- Continuité : 30 pages
- Calcul des dérivées : 90 pages
- Applications des dérivées : 80 pages

On fait de la grosse algèbre pendant 270 pages, trois tests et deux examens avant de mettre ça en contexte.

Mon expérience d'étudiant en calcul différentiel

Table des matières de mon manuel :

On fait de la grosse algèbre pendant 270 pages, trois tests et deux examens avant de mettre ça en contexte.

On commence par des sujets abstraits sans prendre la peine d'expliquer pourquoi on en parle.

Mon expérience d'étudiant en calcul différentiel

Table des matières de mon manuel :

- Rappels d'algèbre : 60 pages
- Calcul des limites : 90 pages
- Continuité : 30 pages
- Calcul des dérivées : 90 pages
- Applications des dérivées : 80 pages

On fait de la grosse algèbre pendant 270 pages, trois tests et deux examens avant de mettre ça en contexte.

On commence par des sujets abstraits sans prendre la peine d'expliquer pourquoi on en parle.

Pourquoi s'étonner que plusieurs décrochent ?

Comment faire décrocher toute une classe

Propriétés des limites

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \lim_{x\to a} C = C \qquad \text{pour tout } C \in \mathbb{R}\\
&(2) \quad \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\
&(3) \quad \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\\
&(4) \quad \lim_{x\to a} x = a
\end{aligned}
$$

Montrons que $\lim_{x\to 1} 2x+3 = 5$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} 2x+3 &= \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 3 && \text{Propriété 2}\\
&= \lim_{x\to 1} 2x + 3 && \text{Propriété 1}\\
&= \big(\lim_{x\to 1} 2\big)\cdot\big(\lim_{x\to 1} x\big) + 3 && \text{Propriété 3}\\
&= 2\cdot 1 + 3 && \text{Propriétés 1 et 4}\\
&= 2+3 = 5.
\end{aligned}
$$

Comment faire décrocher toute une classe

Propriétés des limites

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \lim_{x\to a} C = C \qquad \text{pour tout } C \in \mathbb{R}\\
&(2) \quad \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\
&(3) \quad \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\\
&(4) \quad \lim_{x\to a} x = a
\end{aligned}
$$

Montrons que $\lim_{x\to 1} 2x+3 = 5$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} 2x+3 &= \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 3 && \text{Propriété 2}\\
&= \lim_{x\to 1} 2x + 3 && \text{Propriété 1}\\
&= \left(\lim_{x\to 1} 2\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1} x\right) + 3 && \text{Propriété 3}\\
&= 2\cdot 1 + 3 && \text{Propriétés 1 et 4}\\
&= 2+3 = 5.
\end{aligned}
$$

Le cours de calcul différentiel n'est pas un cours d'analyse réelle.

Une solution

Au lieu de forcer les étudiants à mener une guerre sur deux fronts (l'algèbre et le calcul différentiel), présenter les idées maîtresses du cours dans un contexte où l'algèbre ne pose pas de problème.

Une solution

Au lieu de forcer les étudiants à mener une guerre sur deux fronts (l'algèbre et le calcul différentiel), présenter les idées maîtresses du cours dans un contexte où l'algèbre ne pose pas de problème.

Ensuite, revenir sur ces idées dans des contextes de plus en plus généraux, en les enrichissant.

Une solution

Au lieu de forcer les étudiants à mener une guerre sur deux fronts (l'algèbre et le calcul différentiel), présenter les idées maîtresses du cours dans un contexte où l'algèbre ne pose pas de problème.

Ensuite, revenir sur ces idées dans des contextes de plus en plus généraux, en les enrichissant.

Division du cours en trois boucles :

- Semaines 1 à 6 : fonctions polynomiales
- Semaines 7 à 11 : fonctions rationnelles et algébriques
- Semaines 12 à 15 : fonctions transcendantes

Une solution

Au lieu de forcer les étudiants à mener une guerre sur deux fronts (l'algèbre et le calcul différentiel), présenter les idées maîtresses du cours dans un contexte où l'algèbre ne pose pas de problème.

Ensuite, revenir sur ces idées dans des contextes de plus en plus généraux, en les enrichissant.

Division du cours en trois boucles :

- Semaines 1 à 6 : fonctions polynomiales
- Semaines 7 à 11 : fonctions rationnelles et algébriques
- Semaines 12 à 15 : fonctions transcendantes

Inspiration : *Introduction au calcul différentiel et intégral* de Fernand Beaudet et Yvon Lavoie (Chenelière, 1997).

Fonctions polynomiales (6 semaines)

1. Présentation du cours et du calcul différentiel
2. Rappels : équation de droite, factorisation, zéros
3. Taux de variation moyen et instantané
4. Dérivée d'une fonction
5. Règles de dérivation de base
6. Signe de la dérivée, croissance et extrémums
7. Interprétation de la dérivée seconde
8. Modélisation de problèmes concrets
9. Méthode de Newton-Raphson pour trouver les zéros
10. Méthode de tracé de courbe
11. Révision
12. Examen 1

Exemples de questions d'examen 1

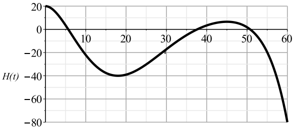
La demande d'électricité d'une ville entre 7 h et 14 h est modélisée par la fonction

$$D(t) = 1200 - 60t^2 + 28t^3 - 3t^4 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 7$$

où $D(t)$ est la demande d'électricité en mégawatts, t heures après 7 h.

- Quelle est la demande maximale durant cette période ?
- Quand la demande est-elle croissante ?
- Quand la demande est-elle supérieure à 1200 mégawatts ?
- À quelle heure la demande croît-elle le plus rapidement ?

Un ballon-sonde s'élève dans l'atmosphère. Il est équipé d'un thermomètre qui enregistre la température à mesure de son ascension. On note $H(t)$ la température, en degrés Celsius, t minutes après le lâcher du ballon. Le graphique suivant montre comment varie $H(t)$ durant la première heure d'ascension du ballon.



- Quel est, approximativement, le taux de variation moyen de la température durant les 25 premières minutes ? Incluez les unités.
- Quel est, approximativement, le taux de variation instantané de la température 25 minutes après le lâcher du ballon ? Incluez les unités.
- Esquissez à main levée l'allure du graphique de la fonction $H'(t)$. Il s'agit de donner une idée de la forme de la courbe et non de faire un tracé précis au millimètre. Graduez l'axe horizontal mais pas l'axe vertical.

Exemples de questions d'examen 1

On s'intéresse au lien entre le degré d'un polynôme et le nombre de points d'inflexion de celui-ci.

- Montrez qu'aucun polynôme de degré 2 ne possède de point d'inflexion.
- Montrez que tout polynôme de degré 3 possède exactement un point d'inflexion.
- Gaston s'écrie : « Logiquement, donc, tout polynôme de degré 4 possède exactement deux points d'inflexion ! » A-t-il raison ? Discutez.

Fonctions algébriques (5 semaines)

1. Rappels d'algèbre : domaine, lois des exposants
2. Dérivée de quotients et de racines
3. Dérivation implicite, taux de variation liés
4. Limites à l'infini, comportement à long terme
5. Limites infinies : asymptotes verticales
6. Extrémums en présence d'asymptotes
7. Modélisation de problèmes concrets
8. Tracé de courbe avec asymptotes
9. Révision
10. Examen 2

Fonctions transcendantes (4 semaines)

1. Fonctions exponentielles et logarithmiques
2. Dérivation et applications
3. Règle de l'Hospital et asymptotes
4. Fonctions trigonométriques
5. Dérivation et applications
6. Fonctions trigo inverses
7. Dérivation et applications
8. Révision
9. Examen 3

Avantages et désavantages de cette approche

Avantages :

- On n'entend plus jamais : « À quoi ça sert tout ça ? »
- Les étudiants faibles en algèbre comprennent de quoi on parle.
- Les étudiants forts en algèbre ne s'ennuient pas.
- On dérive dès la semaine 2, on optimise à la semaine 4.
- Les rappels sont faits au moment où ils vont servir.
- *Les étudiants comprennent davantage ce qu'ils font.*

Avantages et désavantages de cette approche

Avantages :

- On n'entend plus jamais : « À quoi ça sert tout ça ? »
- Les étudiants faibles en algèbre comprennent de quoi on parle.
- Les étudiants forts en algèbre ne s'ennuient pas.
- On dérive dès la semaine 2, on optimise à la semaine 4.
- Les rappels sont faits au moment où ils vont servir.
- *Les étudiants comprennent davantage ce qu'ils font.*

Désavantages :

- On est moins rigoureux (moins de « trips d'analyste »).
- Défi algébrique au début de la deuxième boucle.
- On fait moins d'algèbre que traditionnellement.
- Les fonctions transcendantes sont un peu négligées.