Une preuve que la limite lorsque n tend vers l'infini de $(1+1/n)^n$ est égal à e

Adam Smith

Collège Jean-de-Brébeuf, Finaliste au Prix étudiant

Introduction

La recherche présentée ici est particulière à cause de sa nature. Il ne s'agit pas d'une recherche bibliographique du type auquel on s'attend en histoire ou en littérature ni une recherche expérimentale comme celles auxquelles on pourrait s'attendre si le sujet était la physique ou la chimie. Le travail présenté ici est une preuve mathématique. Une telle preuve est caractérisée par sa rigueur logique et sa précision. Un travail de ce genre, puisqu'il ne s'agit pas de la publication de quelque chose de nouveau, est surtout intéressant à cause de la forme qu'il prend. Avant de décrire cette forme, cependant, j'aimerais expliquer ce qui m'a motivé à entreprendre un travail de ce genre-ci et le but particulier de ce travail.

Les cours collégiaux, tels qu'ils sont construits actuellement, se concentrent sur des aspects très « calculatoires » des mathématiques. On apprend comment dériver, intégrer, optimiser, sans vraiment en comprendre le fondement logique. Ceci est compréhensible : on n'a pas besoin de comprendre pourquoi la dérivation fonctionne pour s'en servir. Toutefois, comme je m'intéresse à des études en mathématiques, j'ai décidé d'explorer un peu ces fondements en faisant une preuve qui partait de la base des mathématiques pour obtenir un résultat intéressant.

De plus, dans ces cours, j'ai remarqué que certains nombres assez particuliers – Ò et e, entre autres – reviennent souvent dans des contextes apparemment non-liés. Le nombre e est particulièrement intéressant parce que, contrairement à Ò, qui a une représentation concrète, e n'en a pas. En outre, il y a au moins quatre façons différentes de définir e. Cette équivalence entre des définitions apparemment sans lien mutuel m'a intrigué. J'ai donc décidé de démontrer l'équivalence de deux d'entre elles. J'ai accepté une d'entre elles, soit que e est le seul nombre pour lequel ln(e)=1, et, à partir de celle-ci, j'ai montré que l'autre était aussi vraie.

Avant de passer à la description de la preuve comme telle, j'aimerais mettre en contexte le problème que j'ai traité de façon informelle afin de le rendre plus concret.

Supposons que j'ai un compte de banque qui contient un dollar et que mon gérant de banque est très généreux. Il me donne, dans sa générosité, un taux d'intérêt annuel de 100%. De plus, il m'offre le choix de calculer cet intérêt autant de fois que je veux pendant l'année (une fois à 100%, deux fois à 50%, trois fois à 33%, etc). Après une année, si je calcule l'intérêt une seule fois, j'aurai 2,00 $. Si je le calcule deux fois, j'aurai 2,25 $, et ainsi de suite. Si je le calcule n fois dans l'année, le montant final dans mon compte sera donné par (1+1/n)^n. Quel est le montant maximal que je pourrais avoir ? Dans mon travail, je montre que ce montant est égal à e, soit environ 2,72 $.

Description de la recherche

Une preuve mathématique, en général, se fait en plusieurs étapes. D'abord, on fixe ce qu'on veut montrer et les postulats, définitions et axiomes desquels on veut partir. Ensuite, on décide d'une façon d'aborder le problème et on le subdivise en petites preuves plus faciles. Finalement, on fait chacune de ces preuves et on les assemble dans un tout cohérent.

Après avoir décidé quel type de travail je voulais faire et à quel sujet, il fallait que je décide comment procéder. Plusieurs outils m'étaient disponibles : la règle de l'Hospital, par exemple, en est un que l'on apprend dans le cours de mathématiques 203 au CÉGEP. Cette règle, très utile dans cette situation, est cependant très difficile à prouver. Étant donné que je voulais faire ma preuve à partir d'outils de base, j'ai décidé de ne pas l'utiliser. Plutôt, j'ai envisagé un chemin un peu plus long mais aussi beaucoup plus simple, qui permettait d'asseoir mon raisonnement sur un fondement plus solide. Je suis donc parti de quelques objets bien définis – les nombres réels, les limites, les dérivées et les intégrales – pour construire ma preuve.

D'abord, il fallait que je montre que cette limite dont je voulais trouver la valeur existait bel et bien. Une des propriétés des nombres réels est que toute suite croissante qui possède une borne supérieure (i.e. une valeur qu'elle ne dépasse jamais) converge vers un nombre réel. J'ai donc montré (1) que la suite étudiée (1 + 1/n)^n était croissante et (2) que tous ses termes sont inférieurs à 4. De ceci, j'ai pu conclure que la suite convergeait vers une limite réelle inférieure ou égale à 4.

Ensuite, j'ai montré que le logarithme naturel de cette limite donnait 1, ce qui est équivalent à dire que la li-

mite vaut e (ln[e] = 1). Pour ceci, j'ai coincé le logarithme de la suite étudiée entre deux suites plus simples qui convergent toutes les deux vers 1. Puisque le logarithme de la suite converge vers 1, la suite converge vers e. Je suis arrivé à cette méthode très simple après plusieurs essais infructueux impliquant des calculs beaucoup plus compliqués, démontrant du même coup que la mesure d'un mathématicien n'est pas simplement la lourdeur des calculs qu'il est capable d'effectuer.
L'étape finale du travail était de le structurer pour qu'il soit compréhensible et facile à lire. Cette étape, très courte, est cruciale en mathématiques afin de ne pas perdre le lecteur. Ceci fait, le travail est terminé et on passe au prochain problème intéressant (et puis à un autre, et un autre, etc).

Conclusion

Le but de ce travail, en plus de trouver la valeur d'une limite particulière, était de m'introduire à l'analyse mathématique et d'apprendre à construire et à rédiger une preuve rigoureuse. De ce point de vue là, aussi bien que du point de vue de la preuve elle-même, le travail a bien réussi. Les habiletés acquises en faisant ce travail m'ont d'ailleurs bien servi lors d'un camp mathématique qui a eu lieu à l'Université de Montréal récemment et auquel j'ai participé.
Notons avant de terminer que le travail présenté ici ne contient rien de nouveau ni de révolutionnaire. La limite calculée peut très bien se trouver à l'aide des techniques apprises dans les cours du collégial et est même un exemple souvent cité. Mon travail est remarquable, cependant, par le fait qu'il n'emploie pas des formules toutes cuites et que les preuves qu'il contient proviennent en grande partie de moi-même.
Notons aussi que la preuve donnée dans mon travail est loin d'être la seule possible. J'en connais au moins une autre et il est possible qu'il en existe une infinité. Celle que j'ai choisie est peut-être quelque peu longue mais est sûrement plus personnelle et plus intéressante du point de vue mathématique.