Variable et Fonction :

influence de la modélisation et de la programmation fonctionnelle

Marie-Jane Haguel
Claudine Lemoine

Variable et Fonction:

influence de la modélisation et de la programmation fonctionnelle

«On programme comme on rédige,
non parce que l'on a compris
mais afin d'arriver à comprendre.»
Joseph Weizenbaum,
Puissance de l'ordinateur et raison de l'homme: du jugement au calcul, 1981, p. 74

Marie-Jane Haguel
Claudine Lemoine
Décembre 1993

Collège de Sherbrooke
Département de mathématiques

Cette recherche a été subventionnée par la Direction générale de l'enseignement collégial dans le cadre du Programme d'aide à la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage.

On peut obtenir des exemplaires de ce rapport en s'adressant aux auteures:

Marie-Jane Haguel et Claudine Lemoine
Département de mathématiques
Collège de Sherbrooke
475, rue Parc
Sherbrooke (Québec), J1H 5M7

Conception graphique Simone Vannucci

Dépôt Légal- 4e trimestre 1993
Bibliothèque nationale du Québec
ISBN 2-920916-21-1

À Anne, Carole, Christiane,
Christophe, Éliane, Francis,
Marc, Nadine, Nicole...
et tous les autres élèves

La direction scientifique de ce travail a été assurée par Madame Gisèle Lemoyne,
professeur de didactique à l'Université de Montréal.

REMERCIEMENTS

Ce travail ne pouvait pas se réaliser sans la collaboration étroite d'un grand nombre de personnes œuvrant dans différents secteurs. Il nous est impossible de faire une énumération exhaustive du support reçu à l'une ou l'autre étape de ce travail mais nous voulons remercier tous ceux qui, de près ou de loin, nous ont permis de comprendre un peu mieux notre rôle d'enseignante.

D'une part, nous voulons souligner le support technique apporté par Madame Louise Marceau qui nous a facilité la tâche pour la recherche des documents de référence, par Madame Sonia Lemay qui a passé de nombreuses heures à retranscrire les enregistrements des dialogues professeur-élève, et par Madame Simone Vannucci qui a pris la responsabilité de la conception graphique.

D'autre part, nous remercions nos collaborateurs immédiats, Madame Michèle Lebrun-Létourneau et Monsieur Réjean Doiron, qui ont enseigné à plusieurs reprises les concepts de variable et de fonction en proposant aux élèves notre séquence didactique. Nous leur sommes reconnaissantes d'avoir relu les multiples versions de certains chapitres et d'avoir bien voulu en faire des critiques constructives.

En ce qui à trait à la relecture, nous remercions en particulier Madame Monique Lasnier et Monsieur Patrick Merrien qui, d'un point de vue un peu plus éloigné de l'enseignement des mathématiques, ont suggéré à leur tour des modifications fort pertinentes.

Nous ne pouvons pas passer sous silence le support apporté par la Direction générale de l'enseignement collégial, dans le cadre du Programme d'aide à la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage. Plus près de nous, nous remercions Madame Jacqueline Giard, directrice du Service de la recherche et du développement du Collège de Sherbrooke, pour nous avoir soutenues lors des démarches administratives.

Enfin, nous remercions Madame Gisèle Lemoyne de nous avoir fait confiance dès le début de ce travail et de nous avoir guidées. Elle nous a appliqué la médecine que nous préconisons pour nos propres élèves avec doigté, clairvoyance et compétence. Nous avons largement profité de ses connaissances, de sa disponibilité et probablement plus encore de sa patience.

RÉSUMÉ

Cette recherche consiste à analyser une séquence didactique d'enseignement des concepts de variable et de fonction. Le but en est triple. Nous visons pour nous-mêmes et pour nos élèves à améliorer la séquence didactique. Pour nos collègues qui veulent utiliser cette séquence, nous souhaitons en expliciter et aider à en contrôler les enjeux en proposant un mode de gestion de la relation didactique. Enfin l'enseignant désireux d'analyser une séquence didactique pourra trouver dans ce document un canevas de travail.

Nous avons procédé à une analyse du rapport entre le savoir savant, le savoir enseigné et le savoir appris.

Dans un premier temps, une étude historique permet de repérer les problèmes mathématiques qui ont été à l'origine de la création et de l'évolution des concepts de variable et de fonction ainsi que les concepts qui forment la trame conceptuelle sans laquelle ils n'auraient pas de sens. Cette étude permet d'apprécier l'écart entre la genèse historique du savoir savant et la genèse artificielle du savoir enseigné incarnée dans une séquence didactique.

Dans un deuxième temps, nous explicitons les intentions de la séquence didactique (le savoir enseigné); nous précisons les objets sur lesquels nous souhaitons que les élèves travaillent et le niveau d'abstraction avec lequel nous désirons qu'ils le fassent.

Nous procèdons ensuite à l'analyse dans le même cadre des réalisations des élèves (le savoir appris). Cela permet d'identifier les leçons lors desquelles il y a rupture dans la construction des connaissances. Nous avons identifié ces leçons comme des «leçons-clé».

Nous vérifions enfin si les élèves qui réussissent ces leçons-clé ont un comportement mathématique qui leur permet de réussir le cours de pré-calcul et le cours de calcul. Cette vérification amène à définir les éléments de savoir et le degré d'abstraction qui semblent être caractéristiques de la formation mathématique à l'ordre collégial.

Table des Matières

Liste des figures et tableaux

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction

Dans le cadre d'observation de la transposition didactique, Chevallard (1985) nous incite à poser quotidiennement la question de la nature de l'objet de savoir qui a été enseigné ce jour et celle du rapport qu'il entretient avec l'objet mathématique auquel il est référé implicitement. Là où l'enseignant voit l'identité de la fin (l'objet à enseigner) et des moyens (l'objet enseigné), dit-il, le didacticien se demande s'il n'y a pas conversion d'objet.

C'est de ce point de vue que nous entreprenons l'analyse d'une séquence didactique d'enseignement des concepts de variable et de fonction que nous avons conçue entre les années 1983 et 1989 (Haguel, 1989). Le but de cette analyse est triple. Pour les auteures de ce rapport, il s'agit d'améliorer leur enseignement, pour leurs collègues qui veulent utiliser cette séquence, c'est une explicitation des enjeux didactiques et une proposition de gestion de la relation didactique. Par ailleurs, tout enseignant désireux de procéder lui-même à l'analyse de son enseignement y trouvera une proposition de cadre de réflexion.

L'introduction du savoir dans la description des événements didactiques, en plus de l'enseignant et des élèves, pose la question de la nature de ce savoir présent en classe, le savoir enseigné, et de sa distance à l'élément correspondant du savoir savant, celui du mathématicien. Cette question étant acceptée, une autre surgit immédiatement. Quel est le savoir que l'élève apprend? Quelles sont les relations entre le savoir appris et le savoir antérieur? Nous avons tenté de répondre à ces questions.

Par une étude historique, nous voulons faire ressortir les problèmes qui ont été à l'origine de la création et de l'évolution des concepts de variable et de fonction ainsi que les concepts qui forment la trame conceptuelle sans laquelle ils n'auraient pas de sens. Cette étude permet d'apprécier l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné. Elle permet de comparer la genèse artificielle que l'enseignant crée lors de la conception d'une séquence didactique, avec la genèse historique et de juger de la fidélité de la séquence à une certaine culture mathématique que tout enseignement devrait transmettre.

Un autre volet de l'étude consiste à expliciter les intentions de la séquence didactique (le savoir enseigné) en regard d'une part des conclusions de l'analyse historique et d'autre part d'une théorie de la compréhension des concepts mathématiques. Cette théorie est un moyen de rendre explicites les choix didactiques et de décrire la transposition didactique qui a été faite.

Or, la séquence didactique n'est qu'une suite de propositions visant à provoquer, par un jeu de manques et de conflits, la construction par l'élève d'un édifice de connaissances structurées. L'enseignant n'a pas le contrôle de cette construction et ses intentions ne se concrétisent pas nécessairement chez tous les élèves de la même façon. Un troisième volet de notre étude porte sur l'examen des acquisitions des élèves. Cet examen ne peut faire abstraction de leurs connaissances antérieures. Il doit aussi préciser les conditions d'occurrence des ruptures conceptuelles par la mise en évidence de leçons-clé par contraste avec celles où il se fait de la consolidation. On fera enfin un retour critique sur la séquence d'enseignement. L'ensemble du problème consiste à vérifier s'il y a concordance entre le savoir, la séquence didactique et les élèves.

Dans le premier chapitre, on trouve la description du cadre de travail et des concepts théoriques qui permettent la description des événements didactiques. L'analyse historique est présentée dans le second chapitre avec son application à l'analyse de la séquence didactique. Dans le troisième chapitre, on expose le modèle de compréhension de Bergeron et Herscovics, et on y intègre le concept de trame conceptuelle pour élaborer une grille d'analyse. Dans le quatrième chapitre, on présente et on analyse la séquence à l'aide de la grille. Après que les élèves aient été présentés dans le cinquième chapitre, on analyse leurs productions dans les sixième et septième chapitres. Il s'agit des réalisations classiques dans un enseignement: exercices, examens périodiques, rapports de laboratoire. Nous vérifions aussi un certain nombre d'apprentissages lors d'entrevues semi-structurées. Dans le sixième chapitre, on identifie, grâce à l'analyse du rapport collectif des élèves au savoir, les leçons-clé, celles qui occasionnent des sauts conceptuels. L'analyse du rapport individuel des élèves au savoir, présentée au septième chapitre, permet de distinguer des comportements mathématiques différents chez les élèves qui réussissent les leçons-clé et chez les autres. Les conclusions de l'étude ainsi que ses limites et les suites souhaitables figurent au chapitre huit.

Nous souhaitons que le lecteur enseignant retrouve dans ce rapport tout le plaisir qu'il y a, après avoir livré une proposition didactique à des élèves, à les voir la transformer, se l'approprier, y trouver la surprise de la découverte et la satisfaction de l'activité intellectuelle. Puisse-t-il aussi y trouver un cadre d'analyse pour les moments qui précèdent l'entrée en jeu des élèves, moments moins confortables, et pourtant bien plus essentiels puisque c'est le temps des décisions, où il se demande si sa proposition est valable et pourquoi elle le serait. Quant au lecteur qui n'enseigne pas, ou pas encore, nous souhaitons qu'il perçoive une attitude qui nous paraît indispensable à toute entreprise d'enseignement, le respect profond des élèves sans lequel toute cette démarche n'a pas de sens. Les élèves méritent ce respect, eux qui traversent cette séquence sans en connaître d'avance les clés que le lecteur s'apprête à lire.

1

Un Problème de Concordance

entre un savoir, des élèves et une séquence didactique

Une science qui est forte, quant est de soy, ne peut pas estre baillée en termes legiers a entendre mais y convient souvent user de termes ou de mots propres en la science qui ne sont pas communellement entendus ne cogneus de chascun...
Nicolas Oresme
(cité par Chevallard (1988))

Ce travail est une tentative d'améliorer volontairement notre enseignement des concepts de variable et de fonction. On peut aussi considérer que c'est une proposition documentée qui pourra être utilisée par tout professeur intéressé à reprendre cette séquence ou à entreprendre l'analyse d'une autre séquence.

Le cours pour lequel nous avons développé la séquence didactique que nous nous proposons d'étudier ici est le cours 201-302-85, *Mathématiques appliquées pour les techniques de la gestion.* Au Collège de Sherbrooke, ce cours est dispensé aux élèves inscrits au programme de techniques administratives lors de leur première session d'études. On leur proposera le premier cours de calcul différentiel et intégral à leur deuxième session et un cours de statistiques en troisième année.

Le cours *Calcul différentiel et intégral I* a la réputation d'être difficile à aborder, même pour les élèves les mieux préparés, les plus motivés aux études et les plus attirés par l'activité intellectuelle. Traditionnellement ces élèves s'inscrivent à un programme général et envisagent cinq ans d'études au moins avant de déboucher sur le marché du travail.

Les élèves inscrits au cours 201-302-85 n'envisagent que trois ans d'études avant de s'insérer dans le monde du travail. Cette relative proximité d'un emploi et la maturité de leur vocation, plus que le goût de l'activité intellectuelle, sont sources de motivation pour ces élèves qui ont pour la plupart une attitude sérieuse quant à leurs études.

1.1 DES DÉCISIONS SUR LES CONCEPTS ENSEIGNÉS ET L'APPROCHE UTILISÉE

Nous concevons le cours 201-302-85 comme un cours orienté vers **une solide préparation au cours de calcul différentiel**. Par ailleurs, afin de respecter l'orientation des élèves concernés, nous leur proposons de réinvestir leurs connaissances en cherchant à préciser les **modèles mathématiques** permettant de traiter des problèmes de gestion. C'est en ce sens que nous disons travailler dans le cadre d'un cours de pré-calcul appliqué à la gestion.

En conséquence, nous avons pris quelques orientations. La première décision concerne **la place centrale accordée aux fonctions**, la seconde concerne le choix des éléments de contenu et des liens entre ces derniers qui formeront la **trame conceptuelle** du cours, la troisième concerne le choix d'**une méthodologie intégrant la programmation fonctionnelle comme outil d'apprentissage** du concept de fonction, enfin, nous avons opté pour une **utilisation systématique de la recherche de modèles mathématiques**. Nous admettons d'emblée la subjectivité de ces décisions qui ne sont pas sans fondement et dont nous décrivons les raisons dans les paragraphes qui suivent.

1.1.1 Les concepts de variable et de fonction, les pivots du cours

Pour ce qui est de la place centrale donnée au concept de fonction, deux courants d'idées appuient ce choix.

Pour les chercheurs qui travaillent sur l'enseignement de l'algèbre au secondaire, l'apprentissage de l'algèbre débouche naturellement sur les concepts de variable et de fonction. Nous faisons ici allusion à Küchemann (1981), Booth (1984), Sutherland (1989a, b, c) et Herscovics (1989).
Pour faire un lien entre la complexité structurelle d'une tâche algébrique et sa difficulté pour un groupe d'âge donné, Küchemann et Booth proposent comme tâches les plus complexes d'établir algébriquement un lien fonctionnel entre des éléments de figures géométriques.
Sutherland, dans une étude sur le développement de la pensée algébrique dans un environnement Logo, cherche à améliorer la compréhension du concept de variable. Pour ce faire, elle place l'utilisation du concept de variable dans le contexte de l'écriture des fonctions.
Enfin, Herscovics, dans le cadre de la description des difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de l'algèbre à différents niveaux scolaires, cite pour les élèves les plus avancés les difficultés concernant l'acquisition du concept de fonction.

D'autres, et en particulier Freudenthal (1983), justifient par l'autre extrémité l'enseignement du concept de fonction. D'après lui, dans l'enseignement des mathématiques, les fonctions descendent du calcul via les représentations graphiques et avec le support des équations, vers l'enseignement élémentaire et jusqu'aux premières années de celui-ci où elles sont concrétisées par des machines imaginaires, exprimées et symbolisées dans le langage des tables et des flèches. On peut d'ailleurs se demander si ces machines et leur manipulation ont encore quelque chose de commun avec les fonctions et la fonctionnalité. N'y a-t-il pas un danger à nommer "fonction" ces objets et un risque de banalisation, de réduction voire de perte? Ces exemples ne peuvent-ils pas un jour devenir des obstacles à l'acquisition du concept de fonction? Les élèves qui arrivent aujourd'hui au collégial ont-ils de tels problèmes avec le concept de fonction?

Toutefois, la question n'est pas de savoir si les fonctions ont leur place dans l'enseignement collégial comme aboutissement de l'algèbre ou comme prémisses au calcul, mais chacun de ces points de vue leur accorde de l'importance comme sujet d'étude au collégial. L'arithmétique, l'algèbre, le calcul, l'analyse et la topologie forment une suite dans laquelle on considère les objets mathématiques sous l'angle de la continuité ou de son pendant, la discontinuité. Les concepts de variable et de fonction jouent dans cette suite un rôle central.

1.1.2 La trame conceptuelle, la garantie de cohérence

À l'origine, les cours de mathématiques appliquées des différents programmes professionnels du collégial étaient présentés comme des versions différentes d'un même cours à thèmes, d'une liste d'éléments de contenu plus ou moins indépendants les uns des autres et parmi lesquels l'enseignant choisissait ce qu'il allait traiter. Ces différentes versions du cours présentaient plus souvent un aspect éclaté que l'aspect d'un tout dont la structure, l'harmonie et la cohésion font une unité de savoir cohérente.

Pour des raisons administratives étrangères à ce problème, on a remplacé le cours à thèmes par plusieurs cours différenciés, sans toutefois régler le problème d'unité. La présence de chaque élément de contenu dans chacun des cours issus de la division est justifiée par l'utilité de son aspect algorithmique dans les cours subséquents de la spécialité. Cette façon de construire les différents cours n'a permis que de manière fortuite d'obtenir pour un cours donné un tout cohérent. Ne parlons pas d'harmonie!

Pourtant, il nous semble clair que l'acquisition par l'élève de connaissances sera d'autant plus facile que ces connaissances sont reliées et prennent place dans un réseau conceptuel riche. On pourrait imaginer que la mise en place d'un tel réseau complique les choses à l'excès. En réalité, l'effort conduit plutôt vers une simplification dans la mesure où les concepts de base se décantent peu à peu.

L'importance de ce réseau conceptuel constitué de connaissances élémentaires, de relations entre ces connaissances que sont les concepts, de relations entre ces concepts, devient encore plus grande lorsqu'on admet, comme nous le faisons, que l'élève est le propre artisan de la construction de sa connaissance. Cette construction, il l'effectue par une suite de comparaisons et de différenciations de ses connaissances entre elles et avec les problèmes qu'il rencontre, suivies d'éventuelles restructurations de ses connaissances. Il ne peut établir des similitudes et des différences significatives entre des éléments de savoir a priori indépendants. Or, faute d'une telle construction, les concepts ne peuvent pas être réinvestis dans des situations nouvelles et ne donnent pas prise sur la réalité. On peut dans ces conditions imaginer la déception des élèves et des enseignants de la spécialité.

Il nous semble donc essentiel, pour éviter le risque de considérer les éléments de savoir de façon isolée, partielle et non située, c'est-à-dire en fin de compte probablement fausse, d'en faire une présentation dans un cadre cohérent que nous appellerons la **trame conceptuelle** du cours.

On trouvera un reflet de la trame conceptuelle dans les activités de laboratoire et dans leur enchaînement. Elle sera explicitée lors de l'analyse de l'intention de chacune des activités au quatrième chapitre.

1.1.3 La programmation fonctionnelle, un outil d'apprentissage

En ce qui concerne le choix d'intégrer la programmation fonctionnelle comme outil d'apprentissage, il s'agit de l'aboutissement d'une démarche assez longue. Le Collège de Sherbrooke occupe une place particulière au sein du réseau des cégeps en ce qui concerne le développement des APO (Applications pédagogiques de l'ordinateur). Nous avons collaboré à ce mouvement dès 1971 en travaillant sur la représentation d'objets mathématiques à l'aide du langage APL (A Programming Language). Pendant quelques années les contraintes techniques avaient mis nos activités en veilleuse. Nous avons repris le développement d'activités pédagogiques médiatisées par l'ordinateur dans le cadre du cours de calcul différentiel en intégrant la programmation en Logo (Giard et Haguel, 1985; Haguel, 1986 et 1988), et depuis 1986 dans le cadre du cours de mathématiques appliquées en utilisant de façon systématique la programmation fonctionnelle.

Notre approche se caractérise dans ses grandes lignes par le fait que c'est l'élève qui procède à la programmation et qu'il est guidé vers la programmation fonctionnelle. Nous avons été amenées à ce choix par la conviction personnelle que le seul moyen pour l'élève d'apprendre des mathématiques est d'en faire lui-même. Il s'agit donc de **placer l'élève dans une situation de problème**. Il doit prendre connaissance d'une question à laquelle il ne sait pas répondre dans l'état actuel de ses connaissances, mais il peut se construire les outils dont il a besoin. L'ordinateur joue alors le rôle d'un miroir intellectuel qui permet à l'élève de faire de son raisonnement un objet qu'il peut examiner, critiquer, corriger et améliorer à son aise.

Les situations sont présentées de manière à ce que, pour chacune, une partie du problème proposé soit semblable à un problème traité préalablement et à ce qu'une autre partie exige que l'élève modifie sa stratégie soit par un ajout d'information soit par un changement de point de vue conceptuel. La question est parfois suffisamment ouverte pour admettre plusieurs solutions différentes et **chaque élève peut alors faire valoir sa propre façon de résoudre le problème.** Chaque élève se retrouve dans l'obligation de trouver lui-même une solution au problème proposé. Cette approche a été décrite avec plus de détails dans Giard et Haguel (1985). Nous y avons montré que cette démarche suscite des comportements actifs et réfléchis. À l'opposé du travail sur papier, le travail sur ordinateur fournit à l'élève un feed-back immédiat sur ses actions. L'élève peut alors réagir en continuant ou en modifiant son raisonnement, selon que le feed-back correspond ou non à ses attentes. Rendu à un point mort, l'élève voudra consulter l'enseignant ou ses collègues, mais devra dans chaque cas formuler verbalement ses intentions et ses difficultés. Or nous croyons beaucoup aux vertus de la verbalisation dans ce genre de situations, comme moyen de mettre en évidence la démarche d'abstraction de certains et de déclencher celle-ci chez d'autres.

Bien sûr cette stratégie qui **met l'élève au centre du processus de résolution** doit aller de pair avec des exigences de participation à la classe. On demande en particulier aux élèves de préparer les activités de laboratoire seuls avant de se présenter au laboratoire. Il est clair que pour obtenir des élèves qu'ils fassent avec sérieux une tâche aussi astreignante, il faut vérifier souvent que ce travail est fait et il faut que l'élève y voit une activité gratifiante et intéressante. Nous utilisons différents moyens d'encouragement: attribution d'une note qui comptera pour le résultat final du cours, réutilisation systématique des solutions d'élèves et possibilité pour l'élève d'améliorer la qualité de son travail et ainsi d'augmenter un peu sa note. Une des stratégies que nous utilisons consiste à donner de façon systématique une aide immédiate sur tout ce qui concerne les aspects plus techniques de la programmation de manière à ce que l'élève ne se sente pas bloqué par un manque de compétence qu'il percevrait comme "informatique". Par contre nous tenons fermement à ne pas "donner" de réponses aux questions qui concernent l'apprentissage des concepts mathématiques en jeu. Nous avons développé avec les années une certaine habileté à répondre à une question par une autre question, à susciter des justifications en faisant mine d'être sceptiques devant des réponses insuffisamment justifiées et en confrontant les opinions divergentes rencontrées chez les élèves. Nous évitons le plus possible de dire à un élève qu'il est parti sur une mauvaise piste et au contraire nous l'accompagnons avec entrain sur cette piste jusqu'à ce qu'il déduise qu'elle doit être modifiée. Comme nous le soulignions plus haut cette méthode est astreignante pour l'élève et nous ne lui ménageons pas les encouragements. Il se trouve que ce n'est ni difficile ni artificiel car les élèves eux-mêmes sentent la qualité de leur travail et expriment, parfois de façon exubérante, la satisfaction qu'ils en tirent. L'enseignante ne vient alors que se joindre à cette manifestation de satisfaction. Il se trouve que pour préparer les activités de laboratoire nous avons nous-même travaillé dur pour résoudre certains problèmes que nous nous posions. Nous avons, nous aussi, obtenu de petites victoires et parfois de grandes satisfactions intellectuelles. Il ne nous est pas difficile de partager ces joies avec les élèves. Cette situation est gratifiante pour eux mais aussi pour nous.

Les activités de laboratoire occupent 28 périodes de 50 minutes parmi les 80 périodes du cours. Pour l'essentiel, les activités de programmation consistent à

- **représenter les fonctions algébriques par des procédures à une entrée et une sortie numériques**;
- traiter les opérations sur les fonctions (+, -, x, / et o) numériquement dans un premier temps, puis symboliquement (λ-calcul) dans un deuxième;
- traiter la tabulation des fonctions linéaire et exponentielle de façon à faire ressortir les traits communs à ces deux types de fonctions;
- traiter la représentation graphique des fonctions comme une variante graphique du procédé de tabulation.

La description des activités de programmation est reprise en détail dans le quatrième chapitre.

1.1.4 La modélisation, un lien avec le sens des objets

Pour le traitement des éléments qui forment la trame conceptuelle, nous avons été guidées par le souci de donner le plus souvent possible un **sens opératoire aux objets mathématiques enseignés** et nous avons choisi de le faire par le truchement de la modélisation de situations issues du monde physique.

Cette préoccupation s'est traduite par la rédaction, encore à l'état d'ébauche, de notes de cours qui concernent la partie "théorique" du cours par opposition à la partie constituée des activités de laboratoire. Contrairement à ce que son nom indique, la partie théorique, outre des définitions, des propositions énonçant des propriétés et des démonstrations de certaines de ces propositions, contient aussi de nombreux liens avec des applications. On y trouve également des exemples de situations dont la modélisation oblige à faire une analyse des propriétés ou des opérations étudiées. Certaines des représentations utilisées dans le cadre des activités de laboratoire sont reprises dans celui des énoncés théoriques. La plupart de ces activités sont entièrement réalisées avant que l'élève n'aborde la partie correspondante de la théorie. Pour certains élèves les activités de laboratoire sont suffisantes pour construire par abstraction les objets visés, d'autres auront besoin de prendre connaissance des éléments plus théoriques pour y arriver, mais tous auront eu l'occasion de se poser des questions.

Cette approche n'est pas réservée à la présentation théorique des éléments de contenu. On retrouve dans les exercices suggérés aux élèves le souci de leur faire construire, dans la mesure du possible, des liens entre des situations à modéliser et les modèles mathématiques pertinents.

1.2 LE PASSAGE DE L'ENSEIGNEMENT À LA RECHERCHE

Après quelques années de mise au point, après que neuf enseignants aient fait leurs commentaires sur tout ou partie de la séquence, dans l'une ou l'autre de ses versions, après que quelque 1000 élèves l'aient essayée, il nous arrive parfois, de modification en modification, de revenir à la version d'il y a trois ou cinq ans. C'est une raison suffisante pour prendre un temps de réflexion, pour expliciter les intentions de chaque élément de la séquence, les liens explicites et implicites entre ces éléments, et plus encore pour examiner comment les élèves réagissent. Le point de départ de cette réflexion est une série de questions, naïves mais pertinentes car inspirées par la pratique. Les élèves ont-ils perçu l'intention de l'activité? Ont-ils réagi à une question théorique en faisant jouer des habiletés de même niveau? Sont-ils embarrassés par les habiletés de programmation à invoquer? Le vocabulaire utilisé au laboratoire retrouve-t-il sa signification dans le monde mathématique? Toutes questions qui nous sont posées à chaque fois que nous exposons notre approche à des collègues.

Nous voulons donc examiner notre travail autrement qu'à la lumière d'opinions, que ce soient les nôtres ou celles de nos collègues. C'est pourquoi nous nous tournons vers la didactique des mathématiques, une science avec ses théories, ses connaissances et ses concepts spécifiques.

1.3 LE DÉFI QUE POSE L'ÉMERGENCE DES CONCEPTS

Nous avons déjà signalé l'intérêt pour l'élève de se construire un réseau conceptuel riche au sein duquel les connaissances, par une suite de remodelages ou de ruptures partielles successives, se simplifient dans la mesure où émergent les concepts de base. Le cadre dans lequel se situe donc l'analyse des événements didactiques du cours de pré-calcul est celui de l'apprentissage des concepts autour desquels est nouée la trame conceptuelle du cours. Ces concepts doivent jouer un double rôle dans la structure de l'apprentissage, ils doivent être le nœud qui assure la cohérence de l'édifice du savoir de l'élève comme produit fini et l'outil de l'édification de ce savoir comme processus.

1.3.1 Ce qu'on enseigne sous le vocable de variable et de fonction

Outil puissant, "l'algèbre représente une rupture par rapport à l'arithmétique puisqu'elle constitue un détour formel: l'arithmétique consiste à choisir de manière intuitive les inconnues intermédiaires ainsi que les données et les opérations utilisées pour les calculer, tandis que l'algèbre consiste à extraire des relations sans s'engager dans un calcul, puis à traiter de manière quasi-automatique, sans souci du sens, les équations ainsi obtenues" (Vergnaud, 1989c). Ce point de vue est partagé par plusieurs chercheurs (Chevallard et Conne, 1984; Conne, 1989; Kieran, 1989) qui attribuent à l'algèbre une fonction heuristique pour la résolution de problèmes spécifiques, pour l'expression de solutions générales et enfin pour la démonstration.

Cette rupture de l'algèbre avec l'arithmétique ne se fait pas sans difficulté; les études réalisées en algèbre et en particulier sur la notion de variable montrent qu'un nombre important d'élèves de 15 ans et plus n'ont pas développé une compréhension formelle de l'algèbre (Booth, 1989; Küchemann, 1981; Sleeman, 1986). Les travaux de Chevallard (1989) et de Vergnaud (1989a) montrent également que le recours à des situations pouvant être traitées facilement par l'arithmétique, situations d'introduction à l'algèbre où l'activité exigée de l'élève en est souvent une de traduction dans un langage où les mots sont des variables, conduit à des conceptions de l'algèbre qui ne sont pas appropriées. Cet artifice ne permet pas à l'élève d'apprécier la valeur heuristique et formelle de l'algèbre. Il faudrait proposer à l'élève des situations suffisamment riches pour justifier les efforts exigés par le passage de l'arithmétique à l'algèbre.

Si on s'accorde sur l'importance à donner au concept de variable, encore faut-il définir avec précision le ou les sens qu'on se propose d'explorer du mot variable. En effet, Schoenfeld (1988) met en évidence dix définitions issues de la littérature sensiblement différentes les unes des autres. Il souligne que le terme de variable est souvent considéré dans les programmes scolaires comme primitif, et comme tel n'ayant pas besoin d'être défini, bien que l'on s'attende à ce que les élèves, avec un peu d'entraînement, le comprennent et l'utilisent directement. D'autres comme Küchemann (1981) voient même la nécessité de dresser un inventaire des diverses utilisations qu'on fait des variables dans les mathématiques.

Quant à nous, nous voulons situer notre enseignement du concept de variable dans une dynamique variable-fonction qui correspond à l'analyse que fait Freudenthal (1982).

> *Functions is more than a fundamental concept of mathematics. It is a powerful means to understand, to interpret, and to control the physical, social, and mental world, but if they are to be handled in this way an indispensable precondition should be fulfilled: conceiving variables in the same spirit. (p.1)*

Pour chacun des deux objets, variable et fonction, il mentionne une double possibilité de définition, l'une plus ancienne, voire démodée, et dynamique, l'autre plus récente, sanctionnée par les puristes et englobante, non plus dynamique mais statique:

> *«variable object» ou «polyvalent name or place-holder» (p. 4)*

pour la variable et

> *«act that assigns to each element of A an element of B» (p. 5)*

ou

> *«Functions can be considered as special relations. Relation from A to B is any subset of cartesian product [A,B]. Such a relation f is called a function from A to B if for every $a \in A$ there is exactly one $b \in B$ such that $[a,b] \in f$. » (p. 6)*

pour la fonction.

Voyons avec Janvier, Charbonneau et René de Cotret (1989) comment le versant dynamique de ces concepts peut aider à unifier les concepts de variable et de fonction et en faire un seul concept pivot dans la compréhension formelle du calcul.

Ces auteurs analysent la complexité de la notion de variable dans la perspective des représentations du changement, perspective hautement dynamique. Ils voient la variable comme

> *un construit mental rattaché aux grandeurs utilisées pour analyser la variation ou le changement qui fait l'objet d'étude. (p. 65)*

D'après eux,

> *...la variable ne peut se comprendre complètement sans une analyse du processus de*

> *modélisation en sciences. En bref, l'étude du réel en changement débouche sur la mise en relation numérique entre divers facteurs issus de l'expérimentation et de la réflexion, mise en relation qui conduit à la variable. (p. 65)*

Nous ajouterions que dans le cas où, lors de la mise en relation numérique de deux facteurs, il y aurait exactement une valeur d'un des facteurs pour chaque valeur de l'autre, cette mise en relation conduit à réunir dans un même construit complexe la variable et la fonction. René de Cotret (1985) en parle comme étant la "variable-fonction".

Janvier, Charbonneau et René de Cotret (1989) démontrent comment le concept de variable ainsi défini permet de passer d'une vision dynamique à une vision plus statique du changement. Sur l'exemple du changement dans le temps, et dans le but de se faire une représentation mentale, une conceptualisation du changement, ils démontrent comme il est difficile car très abstrait de procéder au découpage du continu en des étapes successives qui permettraient de décrire l'évolution du changement. Ces auteurs voient alors la variable comme un instrument d'intégration des états successifs qui permettra de prendre en compte le changement dans les calculs et les raisonnements. Ils mentionnent que cette désignation d'une caractéristique en changement par un terme ou un symbole unique n'est que la première étape dans la description du changement et qu'elle n'est pas facile.

Janvier fait lui-même le rapprochement avec Freudenthal (1983) qui souligne qu'on peut se dispenser d'exprimer variables et fonctions en termes cinématiques en autant qu'on ait déjà maîtrisé cette façon de faire, qu'on ait appris à l'utiliser et à l'éliminer.

> *Well, one can dispense with that kind of kinematics provided one has once been in its possession, learned to use and then to eliminate it. (Freudenthal ,1983, p. 493)*

C'est là le cœur de la discussion.

1.3.2 Les concepts qui permettent de décrire une situation didactique

Nous avons l'intention de traiter avec nos élèves des variables et des fonctions sous l'angle décrit par Janvier, Charbonneau et René de Cotret. Dans leur description, nous avons constaté la double nature dynamique-statique des concepts de variable et de fonction et cette double nature pose la question des choix didactiques. Nous avons traduit dans la séquence didactique nos intentions par des choix qu'on peut alors considérer comme l'explicitation de ces intentions. Comment analyser ces intentions?

1.3.2.1 Le système didactique et la relation didactique

Nous emprunterons un cadre de travail à la didactique des mathématiques dont Chevallard (1985) décrit ainsi l'objet:

> *Mais quel est au juste cet objet? Le didacticien des mathématiques s'intéresse au jeu qui se mène - tel qu'il peut l'observer puis le reconstruire, en nos classes concrètes - entre un* ***enseignant****, des* ***élèves****, et un* ***savoir mathématique****. Trois places donc: c'est le* ***système didactique****. Une relation ternaire: c'est la* ***relation didactique****. (p. 12)*

Pour cette raison nous utiliserons le schéma triangulaire suivant utilisé par bon nombre de didacticiens.

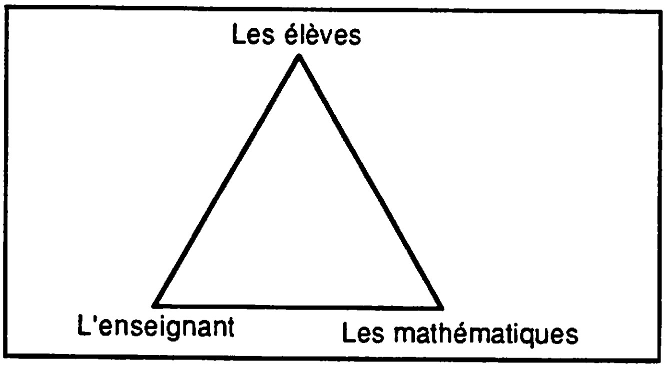


Figure 1. Le système didactique et la relation didactique

Avec ce schéma on laisse de côté une analyse au premier degré qui consiste à ne prendre en compte que les acteurs physiques et à réduire les événements didactiques à la seule dynamique maître-élève, négligeant de considérer le moteur de cette dynamique, le savoir. En effet, les connaissances ne jouent pas dans la classe un second rôle et ne sont pas de simples retombées nécessaires des apprentissages. Giordan (1983) leur donne une grande importance:

> *Elles sont tout à la fois une «économie de pensée» et des «points d'ancrage» du savoir. Toutefois elles supposent d'être resituées et relativisées sous l'angle de l'élève (ses questions, ses motivations, ses cadres de référence) et sous l'angle des finalités et des objectifs d'un enseignement scientifique. (p. 16)*

De son côté Chevallard (1985) souligne la nécessité d'analyser quel est le savoir qui joue ce rôle moteur dans la classe.

> *...ce qui, dans le système didactique, vient à apparaître à l'enseigne du Savoir, qu'est-ce donc? Le «savoir enseigné» que, concrètement, l'observateur rencontre, quel rapport entretient-il à ce qui de lui alentour se proclame? Et quel rapport encore avec le «savoir savant», celui des mathématiciens? Des uns aux autres, quels écarts? (p. 13)*

1.3.2.2 La transposition didactique

Chevallard définit le passage du savoir savant au savoir enseigné, qu'il appelle la **transposition didactique**, et souligne l'obligatoire distance que cette dernière installe. Voilà comment il décrit cet effet:

> *....dans le passage de tel élément du savoir savant à l'élément qui lui répond - ou plutôt, dont il répond - dans le savoir enseigné, il y a d'abord un invariant (en général un signifiant: «ensemble», «distance», etc.) et il y a une variation, un écart, qui fait toute la différence, et que l'examen des problématiques respectives - celle où est pris l'élément de savoir dans le savoir savant, celle où est pris l'élément de savoir mis en correspondance dans le savoir enseigné - ne manque généralement pas de faire surgir. (p. 19)*

Dans le cadre de la transposition didactique, la mise en texte du savoir est un processus d'**apprêt didactique** par lequel le savoir est traité de plusieurs manières. Citons ici en particulier trois traitements spécifiques: la «désintrication » ou en langage savant la désyncrétisation, la dépersonnalisation et enfin la séquentialisation.

Le traitement le plus évident est celui qui consiste à délimiter des savoirs «partiels», chacun s'exprimant dans un discours fictivement autonome. L'enseignant doit aussi différencier d'une part l'objet de son discours, les **notions mathématiques** explicitement enseignées, et d'autre part les objets de savoir «auxiliaires» nécessaires à la construction du texte mais qui n'en sont pas la visée, les **notions paramathématiques** comme la notion d'équation ou celle de démonstration. L'ensemble de ces différenciations est la désyncrétisation.

La mise en texte réalise aussi une dépersonnalisation du savoir, une dissociation entre la pensée et son auteur, qui est la source de la **publicité** du savoir qui s'y présente, par opposition au caractère «privé» des savoirs personnels. C'est ce qui permet le **contrôle social des apprentissages** et **l'institutionnalisation** du savoir.

Enfin, la mise en texte permet la **programmabilité de l'acquisition du savoir** , le texte étant une **norme de progression dans la connaissance**. Et c'est là que le texte se distingue alors le plus du savoir. Il a un début et se déroule séquentiellement contrairement au savoir pour lequel il y a toujours quelque chose avant le «début» et dont la progression ne se fait pas de façon séquentielle. (Chevallard, 1985, p. 58-63)

1.3.2.3 La création d'objets didactiques et leur possible changement de statut

Il arrive que la transposition didactique ait comme effet la création didactique d'objets ad hoc et parfois même la substitution didactique d'objets.

Notre premier exemple est tiré de l'algèbre et plus précisément de la discussion des mérites comparés de la «technique des lettres auxiliaires»[1] et de celle des flèches[2] dans le développement du produit de deux binômes. L'une, la «technique des lettres auxiliaires», par son omniprésence dans différents domaines du calcul est une connaissance paramathématique importante dans la culture mathématique. On lui opposera celle des flèches qui est une création didactique, ce qui n'est pas illégitime en soi. Toutefois, il se trouve que cette technique, une fois acquise, se pose en obstacle à l'acquisition de celle des lettres auxiliaires, obstacle didactique puisqu'il est créé par une forme d'enseignement, et qui confine les élèves qui ne le surmontent pas à évoluer dans une sous-culture

> *D'autre part, la technique des flèches l'emporte aisément, auprès de l'élève, sur la technique des lettres auxiliaires parce qu'elle lui apparaît comme une technique adaptée, faite pour lui: en ce combat elle gagne à tout coup; pourtant cette facile victoire doit être regardée comme une défaite de l'enseignement vu précisément comme socialisation et acculturation, en ce qu'elle substitue à un élément culturel "authentique" un élément fruit d'un artificialisme didactique qu'ici rien n'appelle (la technique des lettres auxiliaires se révélant en fait d'un apprentissage très simple), et qui permet seulement (au professeur autant qu'à l'élève) de faire l'économie de l'affrontement avec la culture mathématique "adulte", au bénéfice d'un repliement et d'un enfermement dans une sous-culture "bébé" expressément conçue à cette fin - repliement qui vient ainsi compromettre le travail engagé jusque là sur le contrat didactique, en arrêtant son évolution sur des formulations archaïques ou régressives. (Chevallard et Conne, 1984, p. 28)*

Notre second exemple est issu de *la réforme des mathématiques modernes*, qui réalisa un grand nombre de créations didactiques d'objets.

> *Ainsi, dans le passage de la **théorie des ensembles** des mathématiciens à la théorie des ensembles de l'école primaire, surgissent divers objets appelés par les exigences de la transposition didactique: les «diagrammes de Venn» constituent à cet égard un exemple frappant. (Chevallard, 1985, p. 42)*

La théorie des ensembles est en soi un champ de recherche limité et peu fertile. Elle prend son sens par ses applications à la cardinalité, à l'étude de l'hypothèse du continu, des ensembles ordonnés et des ordinaux transfinis dont nous parlerons au chapitre 2. On en a fait une utilisation

[1] Posons x=...

[2] $(a+b)(c+d)$

abondante comme substrat pour les structures, les espaces métriques, les groupes et les catégories étant des ensembles ayant des propriétés particulières. Mais la première utilisation non triviale explicite de la théorie des ensembles a été faite en topologie pour définir et utiliser la borne supérieure de fonctions sans maximum et plus généralement les bornes supérieures et inférieures, les limites supérieures et inférieures et les points d'accumulation. Dans la théorie des fonctions réelles et complexes on a besoin d'ensembles ouverts et fermés, de points intérieurs et des frontières d'ensembles. C'est dans le domaine de la mesure, pour mesurer des ensembles vraiment arbitraires de points à l'aide de fonctions ayant certaines propriétés d'additivité, qu'on tire véritablement parti des opérations ensemblistes.

Freudenthal (1983) décrit le glissement qui s'est fait entre ces utilisations savantes de la théorie des ensembles et l'enseignement à l'élémentaire et au pré-scolaire d'un objet du même nom.

Des innovateurs ont affirmé qu'on peut enseigner avec succès la théorie des ensembles, jusqu'alors réservée aux mathématiciens, aux élèves de l'élémentaire et du pré-scolaire. Mais ce dont ils parlaient n'était pas la théorie des ensembles du mathématicien, principe organisateur qui s'applique à des phénomènes tant mathématiques que non-mathématiques.

> *It should be noticed that this is not an unusual way of creating school teaching matter. Rather than developing set theory schemas as organising tools from subject matter that asked for such organising and schematising, empty boxes are taught and, in order to appease one's didactical remorses, filled with (false) concretisations. Sets originating this way always remain within palpably concrete sphere or are purely linguistic phenomena. Collecting a finite number of objects in a set, wich as mental object nobody asked for, only in order to apply set operations on it, is one aspect of this false concretisation. Another is the so-called Venn diagram; a third, logical blocks. (Freudenthal, 1983, p. 39)*

Il y a là création d'objets dans le but de permettre la transposition didactique d'un savoir et ensuite changement de statut de ces objets. De simples représentations de concepts, ces objets, après que leur utilisation ait été adoptée par suffisamment de manuels et ainsi ait été institutionnalisée, deviennent eux-mêmes non plus représentations mais objets de savoir.

1.3.3 Le rôle de l'enseignant

Giordan (1983) a une vision un peu différente qui fait intervenir les conditions dans lesquelles l'enseignant transmet ses connaissances:

> *Mais inconsciemment, de par sa formation et les idées prégnantes dans la discipline qu'il enseigne, il est en fait conditionné non pas par une science qui à la limite n'existe pas, mais par une certaine idée et certaines habitudes, une sorte d'imagerie des sciences. Ce n'est donc pas la science qu'il enseigne mais l'interprétation qu'il a de la connaissance scientifique. Le maître transmet le savoir à travers son savoir ou ce qu'il croit, où la projection du «comment il a acquis son savoir» va déterminer «le comment il transmet ses connaissances». (p. 28)*

Il ressort de l'analyse de ces deux points de vue, la nécessité de se poser la question de la nature du savoir enseigné. Ceci nous renvoie au rôle que l'enseignant joue dans la classe. Pour un enseignant de cégep, ce rôle est rendu plus important à cause de la description très succincte que l'institution (le Ministère par l'intermédiaire de la DGEC) fait des cours et de la méthodologie qu'elle entend y voir adopter. Contrairement aux ordres d'enseignement primaire et secondaire, où le contenu est détaillé dans des guides méthodologiques, au collégial, l'enseignant a la responsabilité d'une grande part de la transposition didactique. De plus, il décide seul, dans le cadre des normes implicites véhiculées par la culture départementale, de la méthodologie qu'il adoptera. Il s'ensuit que l'enseignant joue un grand rôle dans la situation didactique.

Les documents que le maître propose à ses élèves comme guides et l'utilisation qu'il en fait sont le reflet de ses intentions et de l'image qu'il se fait de la façon dont ses élèves apprennent. Dans le cas où il produit lui-même les documents, il devient alors pertinent pour lui et pour ceux qui sont susceptibles d'utiliser les mêmes documents, de se poser la question des intentions par rapport au savoir et de la façon dont l'élève perçoit les intentions des documents et y réagit. C'est là que peut intervenir l'enseignant-chercheur. Il peut harmoniser diverses tâches: la construction et la réalisation d'activités d'enseignement, l'observation et l'analyse d'événements d'enseignement et l'évaluation des activités d'enseignement. Tout ceci doit se faire dans le lieu où se produit l'enseignement et en se référant aux acteurs en présence. La présence d'enseignants-chercheurs permet par ailleurs de mieux contrôler le phénomène de transposition didactique et plus précisément le passage des savoirs disciplinaires aux savoirs enseignés et aux savoirs appris.

1.3.4 Les deux facettes de notre analyse de la séquence didactique

L'adoption d'une vision triangulaire de la relation didactique fait apparaître deux angles sous lesquels on peut examiner la séquence didactique, l'angle du rapport au savoir et celui du rapport à l'élève. Le rapport au savoir apparaît dans la concordance entre les problèmes qui ont motivé l'introduction et l'évolution des concepts et ceux dans lesquels on demande aux élèves de réinvestir leur apprentissage. On prendra en compte le rapport à l'élève en comparant l'intention de la séquence et la compréhension que l'élève aura développée suite à l'apprentissage. Ce sont deux façons de poser un regard critique sur l'intervention de l'enseignant dans la mise au point d'une séquence didactique. Malik (1980) nous ouvre la porte de la première voie et Sfard (1987) celle de la deuxième.

Malik (1980) se place du point de vue du rapport du savoir présenté à l'élève au savoir tel qu'il s'est développé. Il pose la question du choix de la définition à enseigner à propos des fonctions, et il utilise pour y répondre une problématique faisant intervenir une approche historique. Après un examen des problèmes qui ont motivé l'introduction des différentes définitions et de ceux qui ont conduit l'évolution du concept, une comparaison avec ceux qui sont traités dans les différents cours lui permet de conclure que la définition d'une fonction comme une expression ou une formule représentant une relation entre des variables convient aux cours de calcul et de pré-calcul, alors que pour un cours d'analyse il est souhaitable de définir une fonction comme une règle de correspondance entre des réels et de garder pour le cours de topologie la définition ensembliste.

Sfard (1987-1988-1989) se place du point de vue du rapport de l'élève au savoir qui lui est présenté. Elle décrit comment les mathématiciens considèrent les concepts abstraits comme des objets réels, existant en dehors de l'esprit humain. Ces derniers parlent des propriétés de ces objets de la même façon qu'un physicien parle de l'atome. Ils en ont une compréhension structurale. Pourtant, au début de l'apprentissage, les processus et les suites d'actions tiennent lieu de concepts et ceux-ci ne possèdent pas d'existence propre au sens du mathématicien. Ainsi, l'élève s'appuie sur cette compréhension dite procédurale avant d'en arriver à une compréhension structurale. La mise en relation de ces schèmes va conduire à l'abstraction et à la construction du concept. C'est l'abstraction réfléchissante. Le développement d'une compréhension structurale de la notion de fonction est un long processus. Peu d'élèves à la fin des études secondaires montrent une compréhension structurale de la notion de fonction. Sfard montre également que les conceptions des élèves s'apparentent à diverses conceptions qui ont prévalu au cours de l'histoire des mathématiques. Autre résultat important, la majorité des élèves, bien qu'ayant subi un enseignement mettant en valeur une conception structurale de la notion de fonction, ont une compréhension procédurale de la fonction. Cette compréhension est un obstacle qui les empêche d'appréhender en particulier la fonction constante. Enfin, elle définit les principes didactiques suivants: 1) une introduction structurale de la notion de fonction n'apparaît pas appropriée; 2) l'approche structurale de cette notion ne peut être justifiée tant que cette approche ne s'avère pas indispensable i. e. tant que l'élève ne rencontre pas des problèmes dans lesquels plusieurs fonctions doivent être traitées. Selon ces principes, dans le contexte du calcul, les étudiants peuvent très bien vivre avec une conception procédurale de la notion de fonction.

Les deux approches nous semblent complémentaires et nous les suivrons toutes les deux.

1.4 LES QUESTIONS DE RECHERCHE OU LES LEÇONS À TIRER DE L'OBSERVATION DE LA RELATION DIDACTIQUE

Nous voyons la nécessité, non seulement de construire des séquences spécifiques d'enseignement des mathématiques, mais aussi d'en prévoir et d'en contrôler les enjeux notionnels. La recherche actuelle propose essentiellement l'analyse d'une séquence didactique construite au cours des années.

Le schéma triangulaire qui décrit la relation didactique ne donne pas de place au chercheur qui décide de faire l'observation du système didactique. Afin de tenir compte de la fonction d'observation que l'enseignant-chercheur se propose de remplir, nous adoptons une représentation en tétraèdre qui permet de dissocier l'enseignant (représenté par la séquence didactique), du chercheur.

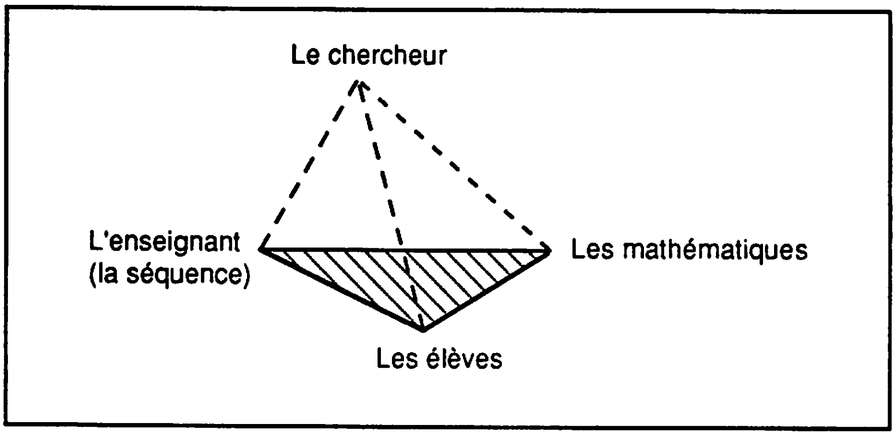


Figure 2. La situation didactique avec enseignant-chercheur

On peut alors considérer différentes observations qui sont symbolisées par les faces du tétraèdre.

1.4.1 La comparaison du savoir savant et de celui qui est inscrit dans la séquence didactique

Une première série de questions d'ordre épistémologique nous place en observation de la relation entre le savoir savant et celui qui est véhiculé dans la séquence didactique que nous analysons. Comment les concepts de variable et de fonction se sont-ils constitués? Comment ont-ils évolué? Comment est-on passé d'une formulation à une autre, en fonction de quels problèmes à résoudre? Avec quels autres concepts ont-ils évolué et quels sont les nœuds de relation entre ces divers éléments? Dans quelles structures ou champs prennent-ils leur signification? Quels enseignements peut-on tirer de cette analyse pour la séquence?

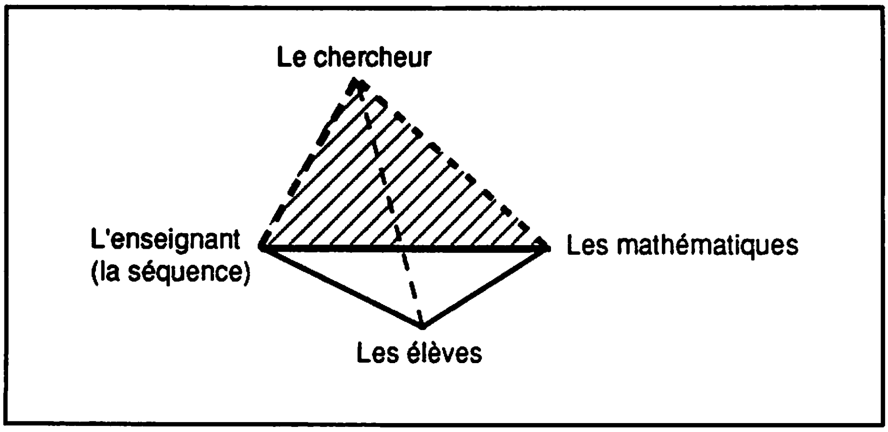


Figure 3. La comparaison du savoir savant et de celui qui est inscrit dans la séquence didactique

1.4.2 L'analyse des intentions de l'enseignant à travers la séquence didactique

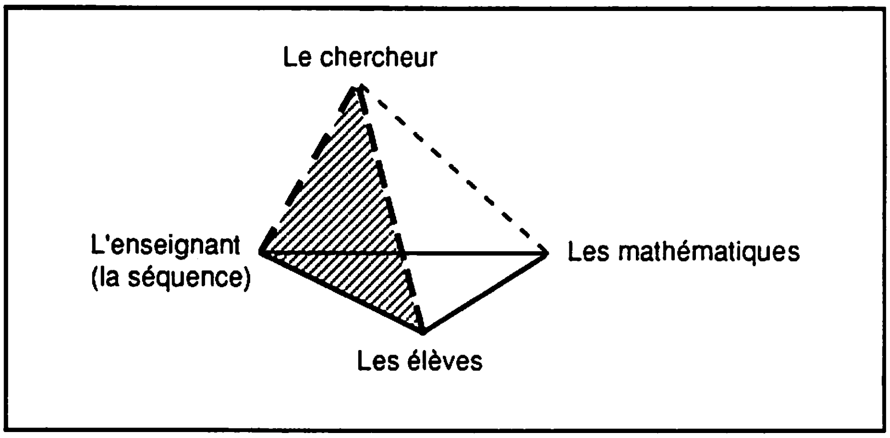


Figure 4. L'analyse des intentions de l'enseignant à travers la séquence didactique

Peu d'enseignants, voire aucun, ne se satisfont d'une compréhension instrumentale (selon la définition développée par Bergeron et Herscovics, 1988) des mathématiques chez leurs élèves. Force est par ailleurs de constater que l'enseignement conduit très souvent à une telle compréhension. Une seconde série de questions concerne l'intention de la séquence didactique. Ces questions nous placent en observation de la relation entre celle-ci et l'élève. Quelle définition des concepts de variable et de fonction la séquence véhicule-t-elle? Quelles sont les intentions de chaque situation proposée? Quelles connaissances la séquence vise-t-elle à mettre en jeu chez l'élève? Avec quels concepts voisins ou sous-concepts pense-t-on faire travailler l'élève? Avec quel degré d'abstraction souhaite-t-on le voir envisager chaque problème?

1.4.3 L'analyse des productions des élèves et de leur rapport au savoir

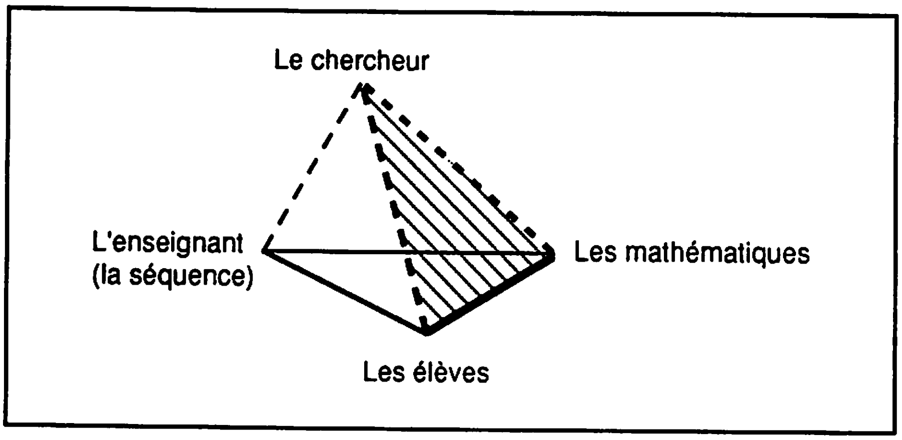


Figure 5. L'analyse des productions des élèves et de leur rapport au savoir

Une troisième série de questions reprend la même analyse dans le cadre des productions des élèves. Ces questions nous placent en observation de la relation entre le savoir savant et celui construit par les élèves. Quelles sont les constructions réalisées par les élèves sur les concepts de variable et de fonction? Quelles sont les leçons-clés? Quelles sont les leçons dans lesquelles il y a modification dans la conception de l'élève à propos des variables et des fonctions? Dans quelles leçons y a-t-il un saut de compréhension; dans lesquelles passe-t-on d'une compréhension procédurale à une compréhension structurale? Quelles sont les leçons dont la compréhension est obligatoire pour la suite de la démarche par opposition à celles dans lesquelles il se fait de la consolidation?

Une analyse du cheminement individuel des élèves permet aussi de placer le cours dans un contexte plus global de réussite des cours de mathématiques. Les élèves qui réussissent les leçons-clés sont-ils ceux qui pourront continuer à faire des mathématiques avec succès et plus particulièrement du calcul? Y a-t-il des élèves incapables de faire le saut vers la compréhension formelle des concepts de variable et de fonction? Une compréhension procédurale est-elle suffisante pour suivre avec profit un cours de calcul? Ceux qui auront atteint un niveau de compréhension structurale et les autres auront-ils des comportements mathématiques différents? Pourrons-nous pronostiquer la réussite du cours de calcul en observant le niveau formel de compréhension de ces deux concepts? Cette dernière question, d'une portée plus sociale, doit être présente lors de la conception des programmes mais aussi à l'échelle de la nécessaire transposition didactique qu'effectue l'enseignant qui prépare son cours et décide de la clientèle qu'il essayera de rejoindre.

Enfin, au-delà de l'analyse de la séquence elle-même nous espérons glaner des résultats de portée plus générale. Peut-on et doit-on aller au-delà d'un niveau procédural de compréhension des concepts de variable et de fonction? Quels sont les obstacles à surmonter? Comment caractériser les situations d'enseignement qui facilitent la construction d'une compréhension formelle? Comment gérer ces situations? Comment décrire ces situations pour que les événements notionnels attendus puissent être produits par les enseignants qui n'ont pas participé à la conception et à l'expérimentation de ces situations?

2

Analyse au fil de l'Histoire

à la recherche du contexte conceptuel

The history of a mathematical concept starts long before it is given a name.
(Freudenthal, 1983, p. 516)

Dans ce chapitre[1] nous avons l'intention de voir l'application de l'histoire à l'analyse d'une séquence didactique et non de tenir des propos savants sur l'histoire. Cela explique que nous fassions parfois référence à certains fragments de la séquence et que nous utilisions un vocabulaire spécifique. Nous tenons à replacer ce chapitre dans le cadre annoncé et illustré à la figure 3.

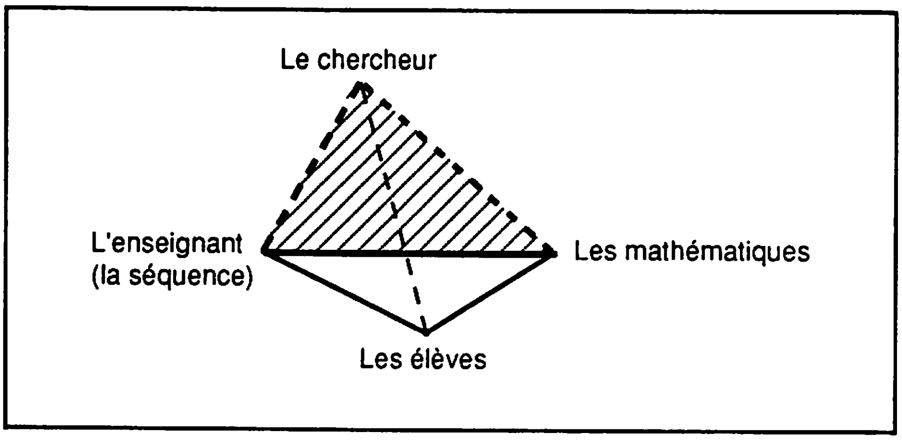


Figure 3. La comparaison du savoir savant et de celui qui est inscrit dans la séquence didactique

[1]Ce chapitre est une retombée de la recherche qui n'avait pas été prévue dans le devis original. La recherche est un processus qui ne se déroule pas toujours de la façon prévue!

2.1 LA NÉCESSITÉ

La conception d'une séquence didactique repose sur une série de choix. La trame conceptuelle et les systèmes de représentation adoptés sont des reflets de ces choix. S'il est clair que ces choix doivent être examinés à la lumière de leur efficacité dans le rapport à l'élève, ils doivent aussi l'être sous l'angle du rapport au savoir. Reprenons les arguments d'Artigue (1990) à cet effet. À l'intérieur d'une séquence didactique l'enseignant propose une structure, une construction des connaissances mathématiques. Il élabore une genèse artificielle de ces connaissances par opposition à la genèse historique. Il est important qu'il ait conscience de la disparité entre le savoir scientifique et la façon dont il s'est développé, et le savoir qu'on se propose d'enseigner.

L'analyse que nous entreprenons ici, redonnera une historicité aux concepts mathématiques que l'enseignement tend à présenter comme immuables. Nous voulons retrouver les problèmes qui ont motivé l'apparition des concepts que nous enseignons et ceux qui ont gouverné leur évolution, car ils sont constitutifs de la signification de ces concepts. En ce sens, ce sera une analyse conceptuelle.

Mais plus généralement, nous partageons l'opinion d'Artigue que l'enseignement des mathématiques, au-delà de la transmission de connaissances mathématiques vise celle d'une culture. Nous devons nous assurer que la transposition que nous faisons ne dénature pas le sens de cette culture. Les critiques de Malik (1980) à propos du manque d'accord entre les définitions enseignées et les problèmes traités avec celles-ci ne sont pas formulées dans ces termes, mais l'esprit en est le même. Il étudie les différentes définitions associées au concept de fonction au cours de l'histoire et détermine ce qu'a été le domaine d'application de chacune. Il suggère de restreindre l'enseignement aux définitions pertinentes, arguant que l'enseignement d'une définition plus abstraite n'aidera pas à la compréhension des techniques et des concepts n'utilisant pas cette définition.

2.2 LES INTENTIONS: DES AMBITIONS LIMITÉES

Étant donné notre cadre de travail, il n'est pas question ici de dresser une histoire du développement des mathématiques ni même un tableau détaillé et complet de la construction des concepts de variable et de fonction. Un tel travail reste d'ailleurs à faire. Il justifierait à lui seul une recherche de beaucoup plus grande envergure que ce que nous nous proposons de faire ici. Cela demanderait de se rapporter aux textes originaux et à des documents scientifiques connexes, afin de déceler, au-delà du fait historique, les nuances et les ruptures qui ont jalonné le développement de ces concepts ainsi que le contexte historique, culturel et en particulier scientifique dans lequel il s'est effectué. Nous nous sommes limitées à consulter des documents d'historiens comme Boyer (1968), Colette (1973), Dahan-Dalmédico (1982), Dugac (1981), Eves (1983) et Youschkevitch (1976) ou de didacticiens comme Freudenthal (1983), Janvier, Charbonneau et René de Cotret (1989) ou Malik (1980). Les seuls extraits d'originaux que nous ayons consultés ont été tirés de l'ouvrage de Dhombres (1987). Cela donne la juste mesure du travail fait dans ce chapitre.

À long terme nous nous intéressons au concept de fonction comme moyen de modélisation mathématique et, dans le même contexte, au concept de variable comme moyen d'expression des liens fonctionnels.

Nous cherchons donc à voir comment ces concepts ont évolué à partir de certains indices comme:
- la forme sous laquelle les fonctions sont présentées: table, description discursive, équation, courbe, ...
- la forme sous laquelle les variables sont présentées: terme générique, symbole, ...
- le contexte conceptuel: le problème abordé, le domaine conceptuel dans lequel l'objet principal de recherche évolue (numérique, algébrique, fonctionnel, ...), les sous-concepts invoqués,
- les opérations auxquelles on soumet les fonctions ou avec lesquelles on obtient de nouvelles fonctions,
- la définition des mots "variable" et "fonction" utilisée.

2.3 L'ANALYSE

2.3.1 L'Antiquité

2.3.1.1 Les occasions

L'observation des phénomènes naturels comme le mouvement des planètes, la direction et la longueur de l'ombre portée, la hauteur du soleil, sont autant d'invitations à construire le concept de fonction et de fonction continue du temps.

Chez les Babyloniens, comme plus tard chez les Grecs, l'observation des corps célestes se traduit par l'élaboration de tables numériques. Les Babyloniens remarquent la périodicité des positions des corps célestes et procèdent, entre deux positions observées, par interpolation linéaire, ou plutôt linéaire par morceaux de manière à tenir compte des variations périodiques de la vitesse.

Par ailleurs, pour résoudre des problèmes simples de géométrie ou pour mener des transactions financières, ils dressent aussi des tables d'inverses multiplicatifs, de carrés et de puissances d'un même nombre.

Chez les Grecs, pour décrire le mouvement des planètes, on utilise plutôt un modèle cinématique de composition de mouvements circulaires qui correspond à la superposition de fonctions trigonométriques. Ces mouvements sont décrits par des fonctions du temps tel qu'il est ressenti, subjectif, et c'est l'observation d'inégalités dans les mouvements qui amènera à préciser, à objectiver le temps. On débouchera plus tard sur une explication du mouvement des planètes par un modèle mécanique.

2.3.1.2 Les différentes fonctions

Dressons la liste des différentes fonctions connues dès l'Antiquité.

On trouve en premier lieu les fonctions trigonométriques, dont la tangente qui est utilisée dans le problème de l'ombre portée et le sinus qui figure sous la forme 2sin $(\alpha/2)$ dans les tables des cordes sous-tendues par un angle au centre. On les rencontre aussi dans la trigonométrie sphérique dans laquelle les côtés des triangles étant des arcs de cercle sont mesurés comme des angles.

On trouve aussi les puissances d'un même nombre c'est-à-dire les exponentielles, et comme elles figurent dans des tables qui se lisent aussi bien à l'envers qu'à l'endroit, on peut dire que les logarithmes s'ils ne sont pas connus, sont utilisés.

Les polynômes de degré 1, 2 et 3 sont connus. On part avec des grandeurs proportionnelles $(y=kx)$, on considère ensuite s'il y a un manque ou un surplus $(y=ax\pm b)$, on fait des produits de deux telles quantités $(a-x)x$ ou $(a+x)x$ avec comme résultats des quantités analogues à des aires, qu'on compare à celle d'un carré, cela peut donner une parabole $(y^2=ax)$, une ellipse $(y^2=(a-x)x)$ ou une hyperbole $(y^2=(a+x)x)$.

2.3.1.3 La formulation des problèmes

Chez les Babyloniens, quand on porte une attention particulière à la notation utilisée, on trouve des énoncés de problèmes et des résolutions présentés de façon rhétorique. Ainsi, l'exemple suivant tiré de Colette (1973) illustre cette façon de faire.

"Connaître la longueur du côté d'un carré dont l'aire moins le côté est égale à 870."

La solution proposée est une suite d'instructions de calculs, dont le résultat est 30, dont on affirme qu'il satisfait bien à la condition. Voici le texte de la solution dans lequel les calculs sont faits en base 60.

"Prendre la moitié de 1, qui est 0;30 et multiplier 0;30 par 0;30, ce qui donne 0;15. Ajouter ce résultat à 14,30;15 qui est le carré de 29;30. Enfin ajouter 0;30 à 29;30 et le résultat est 30, le côté du carré."

Il est remarquable que le problème ne soit pas placé dans un contexte plus global, qu'on résolve un problème spécifique et non une classe de problèmes semblables. On n'utilise bien sûr pas de lettre pour désigner les inconnues puisque l'alphabet n'existe pas encore; mais des mots comme "côté" ou "longueur", "largeur", "aire" et "volume", qu'on retrouvera dans d'autres énoncés, en tiennent lieu:

"J'ai additionné l'aire de mes deux carrés, ce qui me donne 21,15 et le côté de l'un est plus petit de 1/7 que le côté de l'autre." (sous-entendu quels sont les côtés de ces carrés?)

On peut toutefois se demander si le sens même de ces mots n'empêche pas de voir la généralisation possible, faisant en sorte que non seulement le symbolisme de forme qu'est la notation algébrique soit absent, mais qu'en plus l'idée de généralisation des raisonnements et le caractère de généralité des solutions le soient aussi. La réponse n'est pas évidente car il semblerait que parfois les Babyloniens se détachent sans trop de scrupules de ce sens pour additionner et soustraire ensemble une longueur et une aire ou une longueur et un volume. Boyer(1968) y voit un indice d'une pensée plus abstraite que la notation qui est employée pour la traduire.

Chez les Grecs il existe un système de formulation des liens entre grandeurs, celui des proportions. Voici la façon dont Eudoxe (≅370 av. J.C.) les définit.

On dira de grandeurs qu'elles sont dans la même proportion, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, si tout équimultiple qu'on prenne de la première et de la troisième et tout équimultiple qu'on prenne de la deuxième et de la quatrième, les premiers équimultiples sont inférieurs, égaux ou supérieurs de la même façon, que les derniers, pris dans le même ordre.

Il est sous-entendu que la première et la deuxième grandeur sont de même nature tout comme le sont entre elles la troisième et la quatrième. Ainsi il est dit

Les volumes des sphères sont entre eux comme les cubes des rayons.

ou encore

Les espaces parcourus par un corps en chute libre sont entre eux comme les carrés des temps pris pour les parcourir.

ou

Les aires de deux cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons.

Or Janvier (1989) montre que l'impossibilité rationnelle de combiner des aires et des longueurs à l'intérieur d'un rapport oblige à adopter l'écriture $A_1/A_2=r_1^2/r_2^2$, occultant l'écriture $A_1/r_1^2=A_2/r_2^2$ et empêchant de faire le passage à $A/r^2=\pi$ puis à $A=\pi r^2$.

On peut donc s'attendre à trouver un point de rupture à l'occasion de l'adoption d'un système de formulation qui permette de sortir du point de vue des proportions. Cette rupture sera par ailleurs d'autant plus complète et plus efficace qu'elle permettra de passer, du point de vue numérique, de la conception liée au système des proportions "tous les nombres sont des fractions" à la conception "certains nombres sont des fractions".

2.3.1.4 La naissance de la notion de relation

Malgré la similitude entre les tables et la notion de relation, il semblerait que les Babyloniens les conçoivent comme des relations entre des ensembles discrets et finis de quantités constantes prises isolément plutôt que comme des fonctions. Youschkevitch (1976) pose la question de la similitude entre cette conception et celle de Cantor dans le cadre de la théorie des ensembles. Cette dernière est une conception statique dans laquelle l'idée intuitive de quantité variable est réduite à celle d'un ensemble de quantités constantes données d'avance. Il souligne qu'en aucun cas les idées des mathématiciens grecs ne s'approchaient, quelque peu que ce soit, de la conception dynamique incarnée dans les quantités fluentes caractéristiques du calcul infinitésimal des 17ème, 18ème et 19ème siècles. Or, certains voient ce passage par une conception dynamique comme étant obligatoire. En particulier Freudenthal (1983) pense qu'on peut se passer de ces idées cinématiques en autant qu'on les ait déjà maîtrisées, qu'on ait appris à s'en servir et à les éliminer.

Quant à la tentative des Grecs d'exprimer une relation entre deux types de grandeurs, il semblerait que là non plus il n'y ait pas d'idée générale de fonctionnalité. Par contre il faut souligner que de la même façon qu'un concept est longuement utilisé avant d'être nommé, des germes des sous-concepts voisins apparaissent avant que le concept principal sur lequel ils viendront se greffer ne soit explicité. Ainsi nous voyons dans la lecture des tables à l'endroit comme à l'envers apparaître la notion d'inversibilité des relations et dans la composition des mouvements circulaires celle de composition des transformations.

2.3.1.5 Enseignement pour la didactique: revoir l'insertion des fonctions trigonométriques

Il semble qu'historiquement les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques soient apparues sensiblement en même temps que les polynômes. Nous verrons par la suite que les polynômes et les fonctions trigonométriques ont servi au développement en séries de puissances entières et en séries trigonométriques. Or, traditionnellement, au secondaire, on présente ces fonctions longtemps après avoir étudié les fonctions polynomiales. La distance que l'enseignement met entre ces deux types de fonctions nous paraît un peu artificielle.

Il nous semble regrettable qu'au nom de la facilité à trouver des applications ou des exemples d'utilisation des fonctions trigonométriques en physique, on les évacue presqu'entièrement des cours conçus pour les élèves inscrits en sciences ou en techniques humaines. Nous suggérons d'une part de les traiter dans le cours 201-302 (ce que nous faisions déjà) et d'autre part de les traiter dans la mesure du possible assez près des fonctions polynomiales. Cette façon de faire serait encore plus pertinente dans le cas de l'utilisation d'une partie de notre séquence avec des élèves de secondaire. En effet, dans un premier essai, on pourrait alléger la séquence en en supprimant les parties les plus formelles qui sont peut être moins centrales pour ces élèves. Ceci rendrait la présentation des différents types de fonctions encore plus importante et justifierait qu'on apporte un soin particulier à son articulation temporelle et logique.

Dans cet ordre d'idées, il y aurait un travail à faire du côté de l'harmonisation des notations. Il faudrait penser à séparer l'aspect graphique de l'aspect numérique dans les fonctions trigonométriques, ce qui n'est pas fait dans la version actuelle de notre cours. On pourrait aussi utiliser l'interpolation linéaire entre deux valeurs entières des mesures des angles. Bien sûr la question du choix des unités serait à examiner.

2.3.2 Le Moyen Age: le point d'émergence de l'idée de fonctionnalité, la Renaissance: l'élaboration de moyens de calcul

Nous avons mentionné qu'une rupture avec le système de formulation des proportions permettrait un double déblocage donnant la possibilité d'une part de combiner des grandeurs de natures différentes et d'autre part de considérer d'autres nombres que les rapports de deux entiers. Si conceptuellement il s'agit d'une mutation radicale, elle ne s'est faite que progressivement, comme si on devait commencer par épuiser les ressources de l'outil que constituent les proportions et se monter un catalogue de ses limites suffisamment important pour obliger le mathématicien à se tourner vers une autre manière de voir les problèmes et finir par délaisser l'ancienne.

Nous trouvons un premier pas dans ce sens avec les travaux d'Oresme.

2.3.2.1 Un autre système de notation

Dans les écoles de philosophie naturelle d'Oxford et de Paris on considère les mathématiques comme l'instrument privilégié de connaissance des phénomènes naturels. On tente de quantifier ce qu'on appelle des qualités comme la chaleur, la densité, la distance, la vitesse. Elles peuvent avoir divers degrés d'intensité et généralement changent continûment à l'intérieur de certaines limites. Nicole Oresme (≅ 1360) l'exprime ainsi:

> *À l'exception des nombres, toute chose mesurable doit être imaginée à la manière d'une quantité continue.*

C'est lui qui donne la première représentation graphique du changement dans des travaux qui sont examinés en détail par Youschkevitch (1976), Dahan-Dalmédico (1982) et Dhombres (1987). Il représente "l'intention" c'est-à-dire l'intensité, par un trait vertical au dessus du point de "l'extension", c'est-à-dire la place du phénomène, soit dans l'espace soit dans le temps. Il utilise cette technique de représentation avec succès pour représenter la vitesse en fonction du temps et ainsi comparer une qualité qui varie de manière "uniformément difforme" et son degré moyen.

> *"On peut dire que la qualité uniforme est celle qui est également intense en toutes les parties du sujet; que la qualité difforme est telle que, trois points quelconques du sujet étant donnés, le rapport de la distance entre le premier et le deuxième à la distance entre le deuxième et le troisième est comme le rapport de l'excès d'intensité du premier sur le deuxième à l'excès d'intensité du deuxième sur le troisième."*

Considérons un mobile en déplacement rectiligne dont la vitesse suit la variation d'une qualité uniformément difforme. Oresme porte les temps sur une ligne horizontale AB (longitudo) et les vitesses instantanées parallèlement à la ligne perpendiculaire BC, au dessus des points correspondant de AB. La vitesse est alors représentée par la droite DC. Donc la distance parcourue par le mobile, ce qu'Oresme appelle plus généralement la quantité de la qualité uniformément difforme, est représentée par l'aire ABCD sous cette droite. Or, il est facile de prouver géométriquement que l'aire du trapèze ABCD est égale à l'aire du rectangle ABEF.

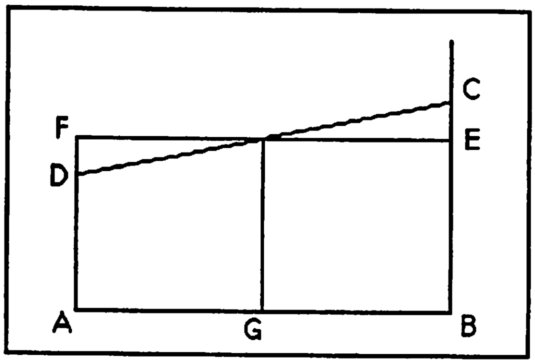


Figure 6. Oresme: illustration du théorème de Merton

"Toute qualité uniformément difforme a même quantité que si elle informait le même sujet ou un sujet égal selon le degré du point milieu de ce sujet. " (Sur la configuration des qualités, vers 1350)

Cet énoncé est plus connu sous le nom de théorème de Merton, c'est un bon exemple du type de travaux menés alors en Angleterre, en Espagne, en France et en Italie.

2.3.2.2 Émergence de l'idée de fonctionnalité

Ces considérations cinématiques reposent sur l'idée intuitive de quantité variable avec le temps, c'est-à-dire de fonction du temps. Cette conception porte les savants de cette époque à considérer les lois de la nature comme des lois de type fonctionnel. La seule ombre au tableau est le manque d'outil numérique pour représenter ces quantités sujettes à changement continu. Janvier (1989) décrit avec précision cette confrontation d'une représentation graphique qui permet d'intégrer une succession d'états intermédiaires, avec l'absence d'un continuum numérique pour réaliser avec des nombres la même étude du mouvement et Youschkevitch (1976) souligne la disproportion entre le haut degré d'abstraction des recherches spéculatives et la pauvreté des ressources de calcul disponibles.

2.3.2.3 La Renaissance: le développement des ressources de calcul

À cette époque reconnue pour ses grandes découvertes, les sciences exactes prennent le tournant de la quantification avec l'invention de plusieurs instruments de mesure. On assiste ainsi au développement de différentes branches de la mécanique dont la dynamique et la mécanique céleste. Le contexte est propice à un développement frénétique des moyens de calcul. Citons à ce titre l'extension du concept de nombre aux nombres réels, imaginaires et complexes, les progrès de la trigonométrie plane et sphérique exposés indépendamment de l'astronomie par Regiomontanus (≈1533) et l'introduction formelle par Napier (1614) des logarithmes. Sans entrer dans les détails mentionnons toutefois que celui-ci procède à la comparaison des distances parcourues à vitesse constante et à vitesse proportionnelle à la distance du but visé. La fonction qu'il définit s'écrirait aujourd'hui $N(x)=10^7 \ln (10^7/x)$. Elle vérifie la propriété $N(ab) = N(a) + N(b) -10^7 \ln (10^7)$ et transforme une suite géométrique en x en une suite arithmétique en N(x). La mise au point d'un algorithme de calcul qui a été la clé du succès de la méthode de Napier est basée sur cette dernière propriété.

Outre le développement d'outils opératoires, on assiste aussi à l'avènement d'un nouveau système de notation, l'algèbre de Viète (1591). Ce symbolisme permet de représenter par une formule faisant intervenir des coefficients arbitraires, les relations entre des quantités inconnues. L'idée d'inconnue et celle de paramètre, au sens où on la rencontre par exemple dans les familles de courbes, font leur apparition. Par contre ce symbolisme ne sera mis au point que progressivement et son utilisation par d'autres mathématiciens, en particulier pour représenter des variables (symboles uniques pour une infinité de valeurs possibles), ne sera pas immédiate. Il permet tout de même l'accès à un plus haut degré de généralité des raisonnements. D'après Freudenthal(1983), si les Grecs avaient de bonnes raisons d'exprimer géométriquement des relations algébriques, rappelons-nous l'exemple de la définition des coniques, on assiste, grâce à l'introduction du symbolisme de Viète, à un changement de perspective qui consiste à exprimer algébriquement des relations géométriques.

Dans les travaux théoriques, les fonctions qui étaient jusqu'alors souvent définies de manière discursive, parfois par un graphe ou de façon cinématique et encore par des tables, le sont à partir de ce moment par des formules et des équations. Comparons par exemple la formulation à l'aide des proportions que donne Galilée de la loi de la chute des corps en 1638 avec la définition que Descartes donne des courbes géométriques, celles où les deux coordonnées sont reliées par une équation algébrique $P(x,y)=0$ qui exprime clairement l'idée d'une équation entre x et y exprimant une dépendance fonctionnelle, ou encore l'utilisation qu'il en fait

> *Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps. (Galilée)*

> *Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de points [...], par le moyen desquels on décrit la courbe demandée.(Descartes)*

Par exemple la recherche de la normale à la parabole d'équation $y^2=2mx$ au point M de coordonnées (x,y) revient à chercher l'intersection de cette parabole avec un cercle $(x-x_1)^2+y^2-r^2=0$ c'est-à-dire à résoudre l'équation $x^2-2(x_1-m)x+x_1^2-r^2=0$. (Descartes)

C'est le début de la géométrie analytique et de sa méthode caractéristique de résolution de problème qui consiste à utiliser un va et vient entre géométrie et algèbre. Ainsi, le plus souvent, Descartes part d'un lieu géométrique et en trouve l'équation alors que Fermat partant d'équations étudiera les lieux géométriques correspondants.

2.3.2.4 Les limites inhérentes aux outils de calcul

En ce qui concerne la compréhension du concept de variable sous-jacente à l'utilisation des notations proposées par Viète et améliorées par Descartes, Newton, Liebniz et Euler, Janvier (1989) mentionne que la notation adoptée dénote, tout comme l'énoncé du problème qui demande de trouver le nombre qui satisfait à certaines conditions, une vision de la lettre comme l'inconnue utilisée dans la résolution d'équations. L'aspect dynamique en est complètement absent. Il semble donc important de distinguer la capacité potentielle des symboles littéraux à désigner par un signe unique la réalité qui varie et l'utilisation qui en est réellement faite.

Quant aux différentes fonctions traitées par Descartes, ce sont celles qui permettent de faire correspondre à une longueur donnée une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques. Seule une telle relation est, selon Descartes, susceptible d'une construction selon laquelle on obtiendra tous les points de la courbe, sans en exclure aucun. Cette possibilité assurera l'enchaînement et la continuité intuitive de la courbe, sans qu'on ait besoin de faire intervenir de considérations infinies. Ce faisant il exclut les courbes transcendantes.

2.3.2.5 Enseignement pour la didactique

Utiliser le temps et l'espace pour donner du sens aux graphes cartésiens et insérer les lois logarithmiques dans un système de reconnaissance.

Il semblerait qu'historiquement ce soient les fonctions de l'espace et du temps qui aient été représentées en premier, ce qui se conçoit facilement étant donné la relative facilité dans ce cas à faire le lien entre la variable représentée et sa représentation. De plus, les représentations des fonctions par des graphes cartésiens telles que présentées au secondaire sont clairement issues des travaux d'Oresme et de Descartes. Nous pensons que l'utilisation de ces deux types de variables et de leur signification pourrait aider à donner du sens aux graphes cartésiens, quitte à se détacher par la suite de ce cadre d'interprétation concrète.

Nous remarquons particulièrement la façon dont Napier a défini le logarithme. Les élèves ont en général beaucoup de difficulté à se construire un moyen de reconnaître qu'un phénomène suit une loi logarithmique. Or nous utilisons déjà pour l'identification de la loi exponentielle la propriété de transformation des suites arithmétiques en des suites géométriques comme c'est expliqué à la section 4.6. Toutefois le cadre de présentation est celui de la comparaison avec la loi affine qui conserve les suites arithmétiques. Le cadre ne constitue pas en soi une ouverture vers l'utilisation de la transformation des suites géométriques en des suites arithmétiques. Nous pensons donc qu'il serait pertinent d'utiliser explicitement cette propriété pour les logarithmes. Ceci pourrait faire l'objet de quelques exercices de laboratoire semblables à ceux des laboratoires 5 et 6, et avoir un complément suffisamment substantiel dans les notes de cours pour que l'élève puisse se construire à partir de là une approche systématique de la loi logarithmique. Nous pourrions aussi englober ces trois modes de reconnaissance d'une loi dans une structure globale, plus visible sur trois exemples que sur deux, et y insérer par la suite le traitement que nous avons déjà prévu des polynômes sous l'angle des différences finies (nous faisons référence ici à la première partie du laboratoire 7 qui n'est pas incluse dans la présente analyse car, bien que présente dans le cahier de laboratoire, elle n'a pas été traitée cette année). Il faudrait aider à la construction d'un cadre fort de reconnaissance et éviter celle d'un truc de cuisine, pour que l'élève dispose ensuite d'un cadre riche et fidèle à la culture mathématique et ne développe pas d'élément d'une culture indigente.

2.3.3 La période moderne: une rupture consommée

Nous avons assisté à une première rupture, l'abandon du système des proportions avec deux conséquences principales, toutes deux des ouvertures sur une nouvelle façon de regarder les objets mathématiques et en ce sens il s'agissait plus de conséquences potentielles que réelles.

La première de ces conséquences concerne le concept de nombre réel. Constater que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel c'est trouver une occasion de délaisser les proportions, démontrer qu'il y a une quantité d'autres nombres irrationnels c'est admettre qu'il va falloir les délaisser; mais énoncer que quelque soit l'unité choisie, celle-ci ne permet pas de mesurer, en proportion, toute grandeur, c'est placer ces grandeurs dans un nouveau système. C'est à partir du moment où on utilise les propriétés de ce nouveau système que la rupture est consommée. Le système des proportions a été mis en cause dans le cadre des propriétés des opérations préalablement existantes, nommément la racine carrée, et le système des nombres réels prendra corps sur la propriété nouvelle de continuité.

La seconde conséquence concerne la méthode de formulation des relations. Le système des proportions ne permettait pas de mettre en relation des grandeurs de natures différentes. Son abandon et l'adoption de la notation algébrique a permis de décrire les liens entre diverses grandeurs. Jusque là on reste dans le même esprit, il s'agit de représenter des relations, des contraintes sur les grandeurs et le but est toujours de trouver des nombres, ou leurs équivalents des points, qui satisfassent les contraintes. Énoncer certaines relations sous forme fonctionnelle est une des possibilités apportées par le nouveau système, et c'est à partir du moment où l'on érige les fonctions nouvellement exprimées au rang d'objet à trouver que la rupture est consommée.

On travaille alors sur des objets d'objets ou des transformateurs, c'est-à-dire dans un espace de raisonnement formel supérieur. Encore faut-il admettre qu'on puisse faire ce saut sur les objets de pensée.

La période moderne est celle pendant laquelle on assiste à une réalisation, à une mise en action de la rupture avec le système des proportions.

2.3.3.1 Intervention des processus infinis

Descartes avait délimité avec précision le domaine de sa géométrie analytique en définissant les courbes algébriques qu'il pouvait traiter et en écartant les courbes mécaniques. Vers le milieu du 17ème siècle plusieurs mathématiciens découvrent comment développer des fonctions en séries de puissances entières élargissant ainsi de façon considérable la gamme des fonctions à l'étude. Citons l'exemple de Gregory qui définit une fonction comme une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable. Le contexte suggère qu'on considère d'ajouter à l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et à l'extraction de racines, une autre opération qui serait le passage à la limite. Par la suite, le développement en séries de puissances entières deviendra un moyen universel d'expression des fonctions analytiques et en ce sens occupera une place centrale en analyse. L'idée de calculer la somme d'une série infinie n'est pas nouvelle, on la connaissait déjà chez les Grecs, mais le fait de se servir de cette opération pour représenter et obtenir des fonctions est tout à fait neuve. Ce sera l'idée de base des travaux de Taylor et Maclaurin que Fourier reprendra avec des séries trigonométriques.

Cette idée, utilisée par exemple pour calculer l'aire sous une courbe, est mise en œuvre grâce à une conception des nombres réels qui contient celle de nombre infiniment petit et de la continuité de la droite numérique.

2.3.3.2 Définition des fonctions et conception des variables

Newton est un de ceux qui ont approfondi cette conception des réels et il en a déduit une formulation de sa conception des quantités variables. Il choisit le temps comme un argument universel, au sens suivant:

> *Mais comme nous n'avons pas besoin de considérer ici le temps autrement que comme exprimé et mesuré par un mouvement local uniforme et qu'outre cela nous ne pouvons jamais comparer ensemble de ces quantités de même genre, non plus que leurs vitesses d'accroissement et de diminution, je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au temps considéré proprement comme tel; mais je supposerai que l'une des quantités proposées de même genre doit augmenter par une fluxion uniforme à laquelle quantité je rapporterai tout le reste comme si c'était au temps; donc, par analogie, cette quantité peut avec raison recevoir le nom de temps.*

En s'appuyant sur cet extrait et sur le suivant, Dahan-Dalmédico (1982) affirme que Newton identifie une variable indépendante, la quantité corrélative, les autres, les quantités relatives, étant dépendantes.

> *Il faut concevoir que la quantité corrélative est le temps ou, plutôt, une quantité quelconque qui flue ou coule uniformément et qui mesure et exprime le temps. Et que la quantité relative est l'espace que décrit dans ce temps un corps ou un point qui se meut d'un mouvement accéléré ou retardé d'une façon quelconque.*

Quant à lui, Freudenthal (1983), pense plutôt que chez Newton les grandeurs varient dans un lien de dépendance et qu'il les imagine comme toutes dépendantes d'une seule qui serait analogue au temps. Suite à une analyse des travaux sur les différentielles de quantités liées et à la constatation que l'écriture fait jouer un rôle symétrique aux quantités variables, il déduit qu'il n'y a pas de distinction entre variable indépendante et variable dépendante à ce stade et que ce n'est que dans le travail sur les dérivées secondes qu'on sera obligé d'identifier la variable indépendante. Il voit par ailleurs une confirmation de ce point de vue dans divers résultats importants que nous citerons dans la section 2.3.3.3.

Nous allons maintenant examiner ce qui nous semble confirmer le changement d'objet des recherches, la définition formelle par Liebniz du mot fonction et les modifications qu'elle subira.

Donc Liebniz est le premier, en 1673, à utiliser le mot fonction pour désigner les lignes qui jouent un rôle, qui ont une fonction dans la figure à l'étude, qui sont sujettes à variations simultanées, et qui sont les objets à déterminer dans le cadre du problème inverse des tangentes. Au fur et à mesure du travail de Liebniz, qui va tourner autour des problèmes qui deviendront classiques de la différentiation et de la résolution d'équations différentielles, il y a une évolution de l'acception du mot fonction. Dans la correspondance que Liebniz entretient avec Jean Bernoulli, on sent la recherche d'un terme général pour représenter des quantités qui dépendent arbitrairement d'une certaine variable. Ce qui les mènera finalement à utiliser le terme fonction dans le sens d'expression analytique.

> *"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes."*

Bernoulli propose la notation ϕx.

Ces hésitations, cette quête d'un terme approprié, sont les préludes d'une démarche analogue chez Euler le siècle suivant.

2.3.3.3 Les nouvelles opérations

La recherche d'une terminologie, tout comme l'introduction des processus infinis, se fait dans le cadre des problèmes de la différentiation et de la résolution d'équations différentielles. Newton pose ces problèmes en termes mécaniques.

> *"La longueur de l'espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du mouvement à un temps donné quelconque."*

ou

> *"La vitesse du mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'espace décrit à un temps donné quelconque."*

Reprenant l'idée que chaque variable peut être à son tour considérée comme la variable indépendante, Freudenthal (1983) montre comment cela a influencé de façon déterminante le calcul alors naissant.

Ainsi on peut travailler indifféremment avec du/dv ou avec dv/du et du même coup affirmer que $dv/du = 1/(du/dv)$. On peut aussi faire des va-et-vient entre les variables disponibles et par exemple simplifier $\int y\, dx$ en passant de la variable indépendante x à une autre qui conviendrait mieux avec $dx=(dx/dt)dt$. Freudenthal dit de cette dernière transformation:

In fact such an integral transformation was the great "aha-experience" in Liebniz' discovery story.

Il précise que connaissant la façon dont x et y sont dépendants et celle dont y et z le sont, on peut établir par élimination celle dont x et z le sont. Réciproquement, en intercalant une variable intermédiaire entre x et z, on peut décomposer la dépendance de x et z en une entre x et y et une autre entre y et z. De plus, pour les différentielles, on a $dz/dx=(dz/dy)(dy/dx)$.

Ces deux opérations sont des applications de la composition des fonctions, opération typiquement fonctionnelle, non encore définie par Liebniz et ses contemporains, mais déjà en vigueur de fait.

Freudenthal montre comment la notation des différentielles et de l'intégrale proposée par Liebniz, associée avec la composition des fonctions, a assuré l'explosion et le succès retentissant de sa méthode de calcul infinitésimal.

Un changement de variable correspond à la substitution qu'en notation fonctionnelle on écrirait $t=f(u)$. Trouver le lien entre x et z à partir de ceux qui existent entre x et y et entre y et z serait composer les fonctions $y=f(x)$ et $z=g(y)$ pour obtenir une fonction h telle que $z=h(x)=g(f(x))$. Dans la relation entre x et y, changer la variable indépendante x pour y serait inverser la fonction $y=f(x)$.

D'après Freudenthal, l'algèbre est dominée par des opérations typiquement algébriques (+, -, x, /, $(\ )^n$ et $\sqrt[n]{\ }$) qu'on peut aussi effectuer sur les fonctions, mais avec les fonctions on ouvre sur une nouvelle perspective, la substitution et l'inversion, on acquiert un moyen de fabriquer des fonctions en grande quantité, un moyen de décomposer et d'inverser les fonctions pour les manipuler plus facilement, et pour les fonctions résultats on a des règles simples de dérivation et d'intégration.

2.3.3.4 Enseignement pour la didactique

Compléter l'étude de la composition par l'inversion et la décomposition de manière à faire une étude plus complète de cette opération typiquement fonctionnelle

Nous pensons qu'il serait bon d'accentuer l'importance de la composition dans le cadre d'un cours bâti autour du concept de fonction. On assurera le passage du traitement centré sur les nombres vers celui centré sur les fonctions, non pas prises une à une, mais considérées dans leur ensemble. Ce changement de point de vue conceptuel en est un d'importance puisque c'est le passage du nombre à la fonction. Il nous semble souhaitable que ce tournant soit pris en particulier avant d'aborder le problème général du développement en séries de puissances entières dans le deuxième cours de calcul.

Il s'agit de passer d'un travail sur des objets à un travail sur des objets d'objets, des transformateurs. On devra changer d'espace de raisonnement pour passer à un espace de raisonnement formel supérieur. Il faudra que l'élève admette qu'il puisse le faire. Si l'on revient au schéma des trois composantes de la situation didactique, l'élève, l'objet mathématique et l'enseignant, ce dernier devra trouver comment intervenir par l'intermédiaire de la situation didactique de manière à obliger l'élève à faire la rupture observée dans la mathématique.

Dans le cours de pré-calcul, on pourrait aborder la composition et les sous-concepts qui lui sont rattachés, l'inversion et la décomposition, dans une démarche graduellement globalisante. Il nous semble qu'on pourrait dans un premier temps aborder l'inversion au cas par cas avant même de traiter la composition, mais plutôt comme un prolongement de l'écriture des fonctions, en relation avec l'ordre dans lequel les opérations s'effectuent. Le problème serait d'écrire une procédure qui déferait le travail que fait la procédure de la fonction $f_1(x)=0,5x-20$ par exemple. Il faudrait travailler à partir d'exemples numériques, en se basant sur les diagrammes de plomberie[2]. Ce serait une occasion de porter un regard sur des connaissances préalables et de faire ressortir les liens entre les opérations inverses l'une de l'autre. À ce sujet on pourrait consulter des commentaires de Freudenthal (1983, p. 555-562).

Il faut considérer que les élèves arrivent au collégial avec une formation en algèbre inachevée et dont on doit reprendre la structuration. Or nous croyons que cette restructuration ne peut se faire qu'en travaillant à un stade supérieur et non en reprenant un enseignement tel qu'il a déjà été donné. **L'histoire nous enseigne que c'est à un niveau plus achevé qu'on redéfinit les concepts précédents par une nouvelle visite des connaissances antérieures.** Même si nous pensons qu'il n'est pas de notre ressort d'assurer la formation en ce domaine (d'ailleurs pourrions-nous faire mieux que nos collègues du secondaire?) toute acquisition qui permettrait à l'élève soit de donner plus de sens à ses connaissances, soit de mettre sur celles-ci une structure qui les rendrait plus faciles à utiliser, est bienvenue. La mise en relation des opérations algébriques et de leurs inverses nous semble avoir cette capacité.

Parmi les applications possibles, nous voyons au premier chef la résolution d'équations du type $f(x)=a$ avec discussion du nombre de solutions selon la valeur du paramètre a. Cela devrait

---

[2] Ce vocabulaire spécifique est expliqué à la section 4.2.1 et illustré à la figure 9.

déboucher sur la question de savoir à quelles conditions l'inverse d'une fonction est elle-même une fonction donnant ainsi un cadre plus large à la distinction entre fonction et relation et faisant ressortir l'importance de la propriété d'unicité de l'image.

On pourrait enchaîner avec les opérations sur les fonctions vues du point de vue numérique comme c'est le cas dans le laboratoire 4. Il faudrait bien sûr ajouter des exercices de composition d'une fonction et de sa réciproque (signalons au passage qu'il y a un problème de choix de la nomenclature, doit-on parler d'inverse ou de réciproque?). On pourrait aussi, étant donné deux fonctions du temps $x=f(t)$ et $y=g(t)$, faire calculer la fonction que les physiciens appelleraient la trajectoire $y=g(f^{-1}(x))$ (ou $x=g(f^{-1}(y))$ selon le cas) mais qui aurait un autre sens selon le contexte du problème. On pourrait faire remarquer aux élèves que ce qui distingue les opérations algébriques ($+$, $-$, $\times$, $/$, $(\ )^n$ et $\sqrt[n]{\ }$) sur les fonctions et la composition c'est que celles-ci sont induites des opérations définies dans l'ensemble image et en ce sens en dépendent largement alors que celle-là, issue de la fonctionnalité en est indépendante.

Dans l'optique du traitement numérique un certain nombre de questions doivent être prises en charge par l'élève, en particulier celle du domaine et du choix d'une partie ou de l'autre de la relation réciproque. Le but de la séquence pédagogique doit être de faire réfléchir l'élève et non pas d'automatiser le traitement des fonctions, un des avantages de la présence de l'ordinateur étant justement de rendre obligatoires et de remettre à l'élève les différentes questions de choix.

Il serait important, en vue du cours de calcul, que les élèves développent une habileté à considérer une fonction dont l'expression algébrique est complexe comme la composée de deux ou plusieurs fonctions et à déterminer l'expression de chacune des fonctions composantes. Ceci pourrait être fait en deux phases, d'une part comme faisant partie des questions prises en charge par l'élève dans des phases préparatoires à des exercices spécifiques de laboratoire, et d'autre part dans le cadre de la partie théorique du cours. Cette analyse sera reprise et détaillée dans l'optique de prolongements dans le cours de calcul.

2.3.4 Le tournant de l'analyse sur fond de définitions

La définition explicite de nouveaux objets susceptibles d'être cherchés constitue en soi un point de rupture dans la mesure où ces nouveaux objets seront susceptibles d'être soumis à des opérations qui leur soient propres et c'est ce qui va se passer par la suite avec les fonctions.

2.3.4.1 Une définition initiale et une classification

Dhombres (1987) présente la façon dont Euler dans son ouvrage, "Introductio in analysin infinitorum" (1748), basé sur le concept de fonction, expose les principales notions de l'analyse comme un "bouleversement de l'architecture de l'édifice mathématique qui constitue une rupture épistémologique". On trouve au début les éléments d'algèbre et les propriétés des nombres, vient ensuite l'étude des fonctions suivie de celle des suites puis le calcul différentiel et intégral. Les applications à la géométrie et à la mécanique sont présentées en dernier alors que traditionnellement elles servaient plutôt de base à la formulation des problèmes.

Dans le cadre de l'analyse, science générale des variables et de leurs fonctions, Euler part de quelques définitions.

> *"Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur."*
> *"Une quantité variable est une quantité indéterminée, universelle et qui comprend en elle-même toutes les valeurs. [...] Aussi une quantité variable comprend en elle-même absolument tous les nombres, à la fois les positifs et les négatifs, à la fois les entiers et les fractionnaires, à la fois les rationnels,les irrationnels et les transcendants. Même zéro et les nombres imaginaires ne sont pas exclus de la signification d'une quantité variable."*
> *"Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres et de quantités constantes."*

Il précise aussi la distinction entre variable et fonction:

> *"Une fonction d'une quantité variable est donc aussi une quantité variable."*

et il mentionne qu'il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont qu'apparemment des fonctions; car quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la même valeur, comme z^0;1^z; (aa-az)/(a-z). Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.

Il cherche à définir ce qu'est une "expression analytique" en examinant les opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées et combinées entre elles. Ces opérations sont l'addition et la soustraction, la multiplication et la division, l'élévation aux puissances et l'extraction de racines, à quoi il faut ajouter encore la résolution des équations. Outre ces opérations qu'il appelle algébriques, il en considère plusieurs autres qu'il nomme transcendantes comme les exponentielles, les logarithmiques, et d'autres sans nombre "que le calcul intégral fait connaître". C'est sur cette classification des opérations qu'il base sa classification des fonctions que nous représentons ici à partir d'un schéma de Dahan-Dalmédico.

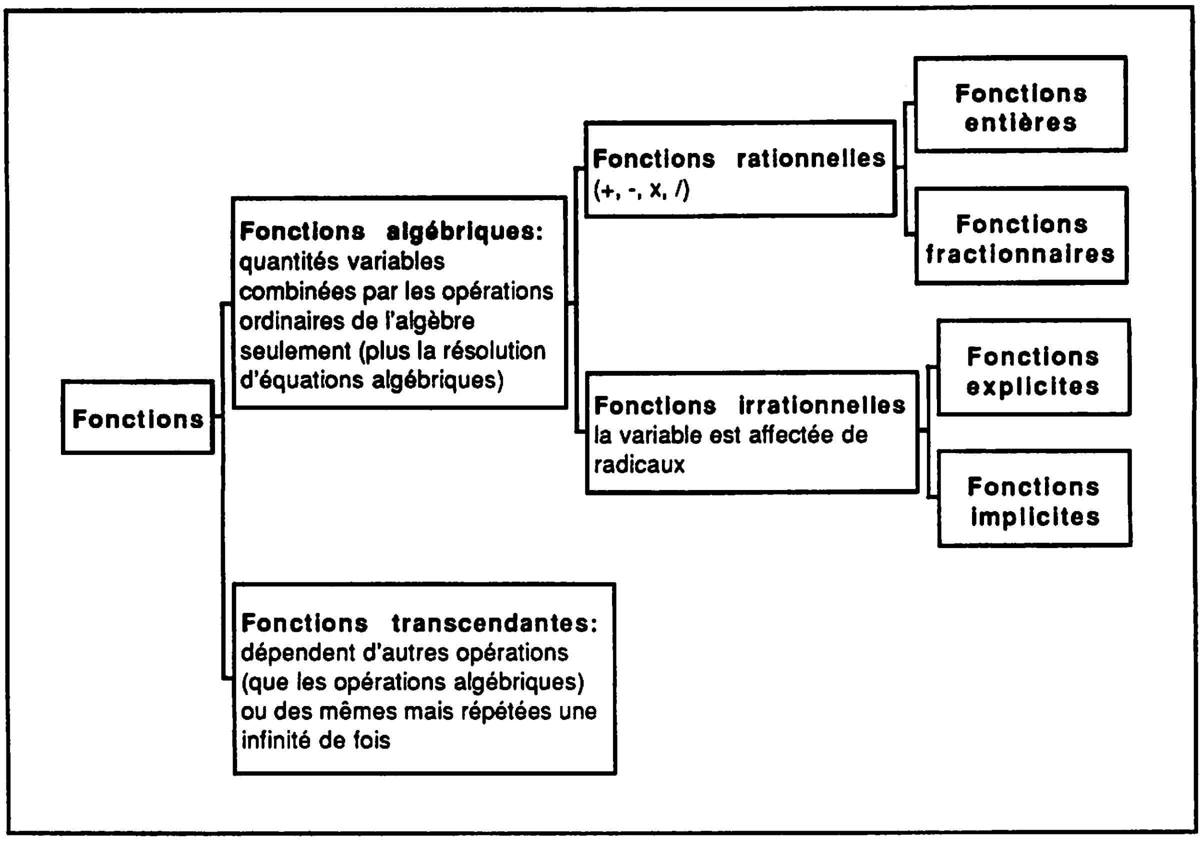


Figure 7. Classification des fonctions selon Euler

Il mentionne aussi la distinction entre fonctions uniformes (image unique d'une valeur de la variable), fonctions multiformes et même fonctions infinitiformes comme l'arc sinus. Par ailleurs il définit comme continues les fonctions définies par la même expression pour toute valeur de la variable, les autres, celles qui nécessitent différentes expressions analytiques étant mixtes ou irrégulières.

Ceci résume la conception qu'Euler se faisait au départ des fonctions. Il se trouve que les développements du calcul infinitésimal permettent à ce moment de traiter de nombreux problèmes de physique dans lesquels la signification des résultats amène à se poser des questions sur la nature des objets qu'on manipule. Le problème des cordes vibrantes en est un exemple. Avant d'examiner les questions qu'il a permis de soulever disons qu'une idée commence à circuler, celle que les fonctions qui interviennent en analyse sont en général localement développables en séries de puissances entières.

2.3.4.2 Le problème des cordes vibrantes

On trouvera dans Youschkevitch (1976, p. 64-69) une description détaillée des travaux de cette époque sur le problème des cordes vibrantes.

Euler s'attaque au problème des vibrations infiniment petites d'une corde homogène finie fixée à ses deux extrémités. D'autres mathématiciens travaillent sur ce problème, et en particulier d'Alembert, D. Bernoulli et Lagrange.

Ce problème revient à résoudre une équation aux dérivées partielles $\partial^2y/\partial t^2=\alpha^2(\partial^2y/\partial x^2)$.

D'Alembert démontre qu'on peut représenter la solution générale sous forme d'une somme de deux fonctions arbitraires $y=\varphi(x+\alpha t)+\Psi(x-\alpha t)$ et qu'en raison des conditions aux limites cette solution se ramène à $y=\varphi(\alpha t+x)-\varphi(\alpha t-x)$.

Or cette fonction φ dépend de la forme initiale de la corde et de la vitesse initiale de ses points, ce qui pose le problème des contraintes que doit respecter la fonction φ. C'est sur ce point qu'Euler et d'Alembert ont des opinions divergentes. D'Alembert impose que la forme initiale de la corde soit représentée par une seule et même équation sur toute sa longueur, qu'elle soit continue au sens d'Euler. Euler lui répond

> *...la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.*

et il produit une solution particulière continue $y=\Sigma a_n \sin(n\pi x/l)$ où l est la longueur libre de la corde. C'est le début d'une longue controverse sur la nature des fonctions qu'on peut utiliser dans les conditions initiales et dans les intégrales d'équations aux dérivées partielles qui apparaissaient en nombre croissant en élasticité, en hydrodynamique, en aérodynamique et en géométrie différentielle.

D. Bernoulli, appliquant une idée avec laquelle il travaillait depuis quelques temps, l'idée de superposition d'oscillations propres, affirme que la forme initiale arbitraire de la corde et ses variations subséquentes peuvent être décrites par une série trigonométrique de la forme $\Sigma a_n \sin nx + \Sigma b_n \cos nx$. D'Alembert rejette cette solution. Fourier donnera plus tard le moyen de calculer les coefficients qui porteront son nom dans le développement proposé par D. Bernoulli.

Relevons qu'Euler a soutenu dès le début la thèse qu'il puisse y avoir des solutions de forme arbitraire, ne satisfaisant pas nécessairement à quelque expression analytique que ce soit. Il en vient à utiliser de façon implicite la notion générale de correspondance entre paires d'éléments, chacun appartenant à son propre ensemble de valeurs de quantités variables, qu'il explicitera en 1755 dans la préface de Institutiones calculi differentialis.

> *Si des quantités dépendent d'autres quantités de telle façon que dès que les dernières changent, les précédentes sont modifiées en conséquence, alors les premières sont appelées fonctions des dernières. Cette dénomination est très générale et couvre toutes les méthodes au moyen desquelles une quantité peut être déterminée à partir d'une autre. En conséquence, si x représente une quantité variable, alors toutes les quantités qui dépendent de x de quelque façon ou qui sont déterminées par elle sont appelées des fonctions de cette quantité.*

Les discussions autour de la nécessité pour les fonctions arbitraires d'être continues, révèlent un besoin pour une distinction plus claire entre fonctions continues et discontinues et annoncent les discussions futures sur les fonctions arbitraires.

Deux grands courants d'idées, correspondants à deux façons d'envisager le problème, se développeront. Le premier, dans un effort de rigueur, définira les sous-concepts du calcul fonctionnel en particulier les infiniment petits, limite, continuité et convergence. Cela permettra d'aller bien au-delà de la façon dont Euler traite la continuité à la fois très intuitivement et d'une manière purement formelle et ce sera l'occasion de clarifier et de généraliser le concept de fonction. Le second courant est centré sur la représentation des fonctions par des séries trigonométriques en vue de résoudre des problèmes issus de la physique.

2.3.4.3 Enseignement pour la didactique

Ouvrir dans les connaissances des élèves un champ de validité pour les questions de comportement local

Ce qui nous frappe le plus dans le survol de l'évolution de la définition des fonctions par Euler est le fait que les questions qu'on se pose à ce moment sont issues de la confrontation entre un développement explosif du calcul infinitésimal et un manque de bases rigoureuses. Le rôle de ces dernières serait d'assurer qu'on ne débouche pas sur des manipulations purement formelles qui n'auraient pas de sens, comme de discuter des propriétés de la somme d'une série sans tenir compte de son domaine de convergence. Ceci nous semble mettre en lumière de façon criante la nécessité de donner l'occasion aux élèves de voir venir les problèmes, de se construire petit à petit une théorie personnelle de ce qui nous semble être les fondements de l'analyse infinitésimale. Il s'agit en particulier de la pertinence de la question qui, au-delà de la formulation d'une définition de l'expression "f(x) est une fonction de la variable x", tente de cerner l'influence des variations de x sur celles de f(x). On voit que dans l'histoire la question du comportement local des fonctions a été centrale. Or, dans l'enseignement, on introduit en général ces questions sur l'exemple du calcul du sommet d'une parabole pour lequel l'élève a une solution locale tellement efficace que cela ne peut en aucun cas constituer un conflit ou un vide de connaissances. Il connaît l'existence d'une formule donnant le sommet cherché et d'une règle d'applicabilité, s'il ne s'en souvient pas exactement. Dans la plupart des cas il n'a pas situé la question dans le cadre de la problématique du comportement local, il n'a pas vu venir le problème. Nous voyons dans l'importance des discussions autour de la nécessité de la continuité des fonctions arbitraires une raison de plus de présenter dès le cours de pré-calcul des questions qui tournent autour du comportement local des fonctions les plus usuelles pour ouvrir dans les connaissances des élèves un champ de validité de ces questions. Comme il ne s'agit pas d'une remise en question mais de commentaires sur la manière de traiter les fonctions affines, exponentielles, logarithmiques et polynomiales aux laboratoires 5, 6 et 7 nous n'insisterons pas d'avantage.

Par ailleurs, nous constatons que plusieurs problèmes sont issus de la physique et que la signification physique des grandeurs manipulées influence le choix des propriétés que le mathématicien décide de considérer. Cet aspect du lien entre l'objet représenté et sa représentation mérite qu'on y porte intérêt à la fois pour en tirer parti et pour se garder d'en faire une utilisation abusive. Nous garderons cette idée en tête au cours de la prochaine année puisque nous envisageons de travailler sur la modélisation.

Une dernière constatation s'impose. Si l'examen du développement du concept de fonction n'a pas cessé de nous passionner, s'il est indispensable de situer les concepts qui relèvent du cours de pré-calcul dans un contexte plus large, il n'en reste pas moins que nous avons examiné le développement de la plupart des sujets traités dans les deux cours de calcul du collégial. Nous n'arrêterons pas pour autant notre tour d'horizon puisqu'il faudrait au moins se rendre jusqu'aux problèmes qui furent à l'origine de la définition ensembliste des fonctions et de la composition.

2.3.5 Essais de caractérisation des fonctions arbitraires

Avec le problème des cordes vibrantes et d'autres problèmes de résolution d'équations aux dérivées partielles, on a vu apparaître la nécessité de faire intervenir des fonctions arbitraires qu'on voudrait bien qualifier. À partir de ce thème les travaux vont se déployer de proche en proche autour de plusieurs autres thèmes qui ont tous une souche commune, la définition des réels, problème encore irrésolu. Aussi on va de l'un à l'autre pensant trouver dans le suivant la solution du précédent. Or, il est évident pour les mathématiciens de cette époque qu'une fonction arbitraire est monotone par morceaux et probablement continue par morceaux, aussi est-ce du côté des fonctions continues qu'on voit une première piste possible.

On trouvera une description détaillée de ces travaux dans Dugac (1981).

2.3.5.1 Fonctions arbitraires et continuité

Bolzano donne de la continuité une définition qui, bien que n'étant pas quantifiée, est dans l'esprit de la définition actuelle. En effet pour lui, dire qu'une fonction réelle f de la variable réelle x est continue, pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle donné, ne signifie

> *rien d'autre que ceci: si x est une telle valeur quelconque, la différence f(x-w)-f(x) peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre w aussi petit que l'on voudra.*

Cette dernière définition n'est pas sans poser de problème tant que les réels n'ont pas été clairement définis, en particulier à Bolzano qui a critiqué l'usage abusif des séries infinies (Le théorème du binôme, 1816) et qui fait remarquer que la notion de nombre irrationnel n'est pas sérieusement fondée.

Cauchy part aussi de l'idée d'étudier les propriétés générales des fonctions continues mais avec comme préoccupation de définir à quelles conditions une formule algébrique (en particulier un développement en série) représente une fonction. Pour cela il commence par fixer le sens des notations, par exemple pour lui un infiniment petit est un nombre qui a zéro pour limite et un nombre irrationnel est la limite de diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus rapprochées. On voit que là encore on a besoin de définir les réels.

Sa définition d'une fonction (1821) est intermédiaire entre celle d'Euler et celle de Dirichlet un peu plus tard:

> *Pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction.*

Il pose certains problèmes sans savoir y répondre de façon définitive, celui de la conservation de la continuité par passage à la limite et celui du lien entre continuité et dérivabilité

2.3.5.2 Fonctions arbitraires et discontinuité

Les questions posées par Bolzano sont reconnues comme pertinentes par les mathématiciens, mais les preuves de certains théorèmes (faux) ne convainquent pas tout le monde et plusieurs se lancent à la recherche de contre-exemples. C'est une technique qui va donner le jour à plusieurs fonctions pathologiques et à l'étude des fonctions discontinues

Dirichlet ayant démontré (1829) que toute fonction continue et monotone par morceaux (donc ayant un nombre fini de discontinuités) est représentable analytiquement par une série trigonométrique (série de Fourier), s'intéresse au cas où le nombre de discontinuités est infini.

Pour conserver l'intégrabilité au sens de Cauchy, il impose à la fonction que ses points de discontinuité forment un ensemble rare. Or c'est une condition d'un autre ordre que celles qu'on a invoquées jusqu'alors, c'est une condition topologique.

Pour démontrer que ce n'est pas une condition triviale, Dirichlet donne un exemple d'une fonction vraiment "arbitraire" qui ne vérifie pas cette condition.

$$f(x) = \begin{cases} c \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ d \neq c \text{ si } x \text{ n'est pas rationnel} \end{cases}$$

Avec c=1 et d=0 on obtient la fonction caractéristique des rationnels qui transfère ses singularités à son ensemble de définition. Cette fonction partout discontinue amène Dirichlet à poser en 1837 la définition suivante d'une fonction:

f est une fonction si elle fait correspondre à toute valeur de x une valeur bien déterminée f(x).

En 1838, il dira que les fonctions arbitraires sont celles qui ne sont assujetties à aucune loi analytique.

Si on dresse un catalogue des fonctions discontinues dont on dispose à cette époque, on y trouve les fonctions rationnelles et leurs composées, les fonctions continues par morceaux et certaines séries convergentes de fonctions continues. L'idée sous-jacente à ce dernier mode de construction de fonctions discontinues est d'atteindre le discontinu à l'aide du continu en faisant intervenir l'infini. Or ce dernier concept pose des problèmes comme le remarque Bolzano (1820)

Il est certain que la plupart des énoncés paradoxaux que l'on rencontre dans le domaine des mathématiques sont des théorèmes qui contiennent le concept de l'infini, soit directement, soit qu'ils s'appuient sur lui, au moins d'une certaine façon, lorsqu'on cherche à les démontrer.

On cherche donc à définir l'infini, ou plutôt la nature des ensembles infinis. Dans cette veine Bolzano explicite la possibilité de mettre en "bijection" deux sous-ensembles infinis différents de la droite, faisant ainsi un premier pas vers la notion d'équipotence des ensembles.

Par la suite Riemann met au point une théorie de l'intégration qui permet d'intégrer des fonctions ayant une infinité dénombrable de discontinuités mais bornées. Cela débouchera sur la possibilité de mesurer des ensembles de points autres que les intervalles, de distinguer ensembles rares et ensembles de mesure nulle et de faire clairement la distinction entre fonction continue par morceaux et fonction dérivable.

Nous nous intéresserons dans cette section au travail de Weierstrass bien qu'il ne se situe pas dans la ligne qui semble se dessiner vers la définition d'une théorie des ensembles infinis, car il permettra d'une certaine façon de fermer une des avenues, celle du lien entre continuité et expression analytique.

Weierstrass travaille sur le développement des fonctions usuelles en séries de puissances entières autour d'un point. Sa définition des fonctions est celle que nous connaissons actuellement et il émet quelques doutes sur l'utilité d'une définition aussi générale. Il décide de tenter de déterminer des classes de fonctions les plus générales possibles dont on puisse donner une représentation analytique.

C'est dans ce cadre qu'il s'attache à une construction rigoureuse et soigneuse des nombres réels. Il se base sur les travaux de Bolzano et donne des démonstrations rigoureuses des théorèmes essentiels de l'analyse. Il part des nombres entiers, et passe à la "construction" des réels, il étudie les nombres complexes, les polynômes et les fractions rationnelles. Il aborde ensuite les séries entières en utilisant les notions de limite, de borne supérieure et inférieure, de convergence uniforme et les premiers éléments de topologie générale comme les ensembles bornés, les ouverts, les voisinages d'un point, les points extérieurs, les points frontières et les ensembles connexes. Il présente en 1872 le premier exemple d'une fonction continue sur la droite et dérivable en aucun point ce qui va contre l'intuition géométrique qu'on a de ces deux propriétés. Enfin, en 1885, Weierstrass démontre que toute fonction réelle continue peut être représentée par une série convergente de polynômes. Une partie de la boucle est bouclée, les fonctions continues sont représentables analytiquement.

2.3.5.3 Fonctions arbitraires et ensembles infinis

Reprenons le fil conducteur qui semblait mener Bolzano des fonctions discontinues, par le biais de leurs singularités, aux ensembles infinis.

Dans un souci de rigueur, Dedekind donne naissance en 1871 à la théorie des ensembles qu'il utilise pour fonder une théorie des idéaux "rigoureuse et sans exceptions". Les ensembles y sont considérés comme des objets soumis aux lois mathématiques et sur lesquels il définit des opérations. En 1872, il publie une théorie dans laquelle les nombres réels sont définis de façon ensembliste à l'aide de la notion de coupure des rationnels (qui sont supposés donnés).

Il entreprend ensuite de "construire" l'ensemble des nombres entiers dans "Que sont et que représentent les nombres?" écrit entre 1872 et 1888. On trouve dans cet ouvrage les bases de la théorie naïve des ensembles.

Il commence par définir les ensembles d'éléments, les relations d'appartenance et d'inclusion, l'égalité de deux ensembles et les opérations d'union et d'intersection.

Il traite ensuite des "applications" en conservant la définition de Dirichlet:

> *l'application f est une loi qui à tout élément déterminé s d'un ensemble S fait correspondre un élément bien déterminé f(s), image de s.*

Il introduit la restriction de f à un sous-ensemble T de S, montre comment f conserve l'union et l'intersection des ensembles, introduit la notion d'application composée et démontre l'associativité de la composition. Il démontre ainsi l'intérêt que présentent les applications les plus générales. C'est sur les concepts d'ensemble et d'application qu'il base les trois concepts sur lesquels repose sa théorie des nombres entiers, ceux d'idéal, de coupure et de chaîne.

Il définit ensuite les applications bijectives et démontre qu'elles admettent une application inverse. Viennent ensuite les ensembles équipotents entre lesquels il existe une bijection. La relation d'équipotence étant une relation d'équivalence lui permet de "partager tous les ensembles" en classes d'ensembles équipotents entre eux.

On aura reconnu au passage l'utilisation de l'ensemble de tous les ensembles, siège d'un paradoxe alors inconnu.

Dedekind aborde en dernier les ensembles infinis qu'il définit comme équipotents à une de leurs parties propres. Cette dernière partie de son travail est inspirée en particulier des "Paradoxes de l'infini" de Bolzano.

En fait la théorie des ensembles servira de point de ralliement pour deux courants d'idées. L'un, représenté par Fourier, Dirichlet et Riemann, concerne le fond c'est-à-dire le développement des fonctions en séries trigonométriques et l'intégration des fonctions discontinues. Il aboutira à l'idée de mesure et d'ensembles de mesure nulle. L'autre, représenté par Bolzano, Cauchy, Weierstrass et Dedekind, concerne plutôt la rigueur, la méthode et la délimitation du domaine de l'analyse, il prend ses distances avec l'intuition géométrique et un certain formalisme vide de sens. Cantor servira de lien entre ces deux courants.

Cantor, élève de Weierstrass, travaille à affaiblir les hypothèses sous lesquelles une série trigonométrique $\Sigma a_n \sin nx + \Sigma b_n \cos nx$ convergente vers f a nécessairement tous ses coefficients nuls. Cela le conduit à définir les ensembles de points exceptionnels sur lesquels f peut être non nulle et il s'intéresse à leur puissance, rejoignant ainsi Dedekind sur son terrain.

Il établit l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$, et pose à Dedekind la question de l'existence d'une relation semblable entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Celui-ci en établit une entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres algébriques. Sous cet aspect Bolzano avait démontré de $\mathbb{R}$ qu'il était infini en utilisant la bijection définie par $x \longrightarrow 12x/5$ pour mettre en relation [0,5] et [0,12].

C'est en 1877 que Cantor démontre qu'on peut mettre en bijection une droite avec un plan et donc que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ont même puissance, ensuite il démontre qu'on peut toujours à partir d'un ensemble E, construire un ensemble de puissance strictement supérieure, par exemple $\mathcal{P}(E)$, à la suite de quoi il vérifie facilement que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ont même puissance. Il est persuadé qu'il n'existe pas d'autres types d'ensembles infinis de points de $\mathbb{R}^n$ que ceux qui sont dénombrables (équipotents à $\mathbb{N}$) et ceux qui ont la puissance du continu (équipotents à $\mathbb{R}$). Il tentera toute sa vie de prouver cette hypothèse appelée hypothèse du continu, dont on sait depuis 1963 qu'elle est "indécidable" dans le cadre de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel de la théorie des ensembles. C'est avec cette ambition qu'il entreprend une classification du point de vue de la puissance de tous les sous-ensembles infinis de la droite. Sa théorie s'appuie sur les concepts de point d'accumulation, d'ensemble dérivé, d'ensemble parfait, d'ensemble partout dense et sur l'ensemble vide.

$x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de E si tout intervalle ouvert contenant x contient une infinité de points de E,
l'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble E est son ensemble dérivé E' ou $E^{(1)}$,
l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble $E^{(1)}$ est le second ensemble dérivé de E, E" ou $E^{(2)}$, et ainsi de suite,
un ensemble E est parfait si $E = E^{(1)}$,
s'il arrive que $E^{(n)}$ soit fini, alors $E^{(n+1)}$ est un ensemble vide et on dit que E est un ensemble de $n^{ème}$ espèce,
un ensemble E est partout dense dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ si tout sous intervalle ouvert de I rencontre E.

Il démontrera ainsi que si f(x)=0 dans]0,2π[sauf aux points d'un ensemble de $n^{ème}$ espèce, alors tous les coefficients de la série trigonométrique Σa_n sin nx $+\Sigma b_n$ cos nx convergente vers f sont nuls.

À la suite de quoi il introduit l'ensemble dérivé d'ordre ω, $E^{(\omega)}=\cap E^{(n)}$. En continuant par dérivations successives, le premier dérivé de $E^{(\omega)}$ est $E^{(\omega+1)}$ etc... , l'ensemble dérivé de $E^{(\omega)}$ d'ordre ω est $E^{(2\omega)}$ et ainsi de suite $E^{(\omega^2)}$, $E^{(\omega^\omega)}$ etc...

Cantor définit ainsi l'ensemble des ordinaux. Les ordinaux finis forment la classe I des ordinaux, tandis que les ordinaux des ensembles de première classe (les ensembles dénombrables) forment la classe II des ordinaux: ω, ω+1, ..., 2ω, ..., ω^2, ...; les ordinaux des ensembles infinis non dénombrables forment la classe III. Un nombre de la classe II ou de la classe III est un nombre transfini. C'est la construction d'une arithmétique des nombres transfinis, concept unificateur qui permet de traiter d'un même point de vue le continu et le discontinu et de considérer l'infini non plus comme une génération progressive (infini potentiel) mais comme un objet arithmétisable (infini en acte).

Dans cette veine, à partir des années 1880, on fonde sur la théorie des ensembles l'espoir d'une unification et d'une synthèse des mathématiques qui n'aura lieu qu'après avoir surmonté les contradictions logiques à propos de l'ensemble de tous les ensembles.

Rappelons que Weierstrass a démontré que toute fonction continue est représentable par une série et qu'on a travaillé sur les points de discontinuité des fonctions obtenues comme limites simples (non uniformes) de fonctions continues. Mais la question de savoir si une fonction discontinue quelconque est représentable analytiquement n'est pas réglée.

Baire travaille sur les relations, pour une fonction de deux variables x et y, entre sa continuité par rapport à (x,y), sa continuité par rapport à x et à y séparément et la continuité de la fonction f(x,x). Il introduit la notion de semi-continuité inférieure et supérieure et découvre qu'une fonction semi-continue supérieurement (resp. inf.) sur un intervalle est ponctuellement discontinue sur cet intervalle. En 1898 il généralise le théorème de Weierstrass aux fonctions ponctuellement discontinues, elles sont, elles aussi, représentables analytiquement.

Baire introduira une classification des fonctions selon leur mode de construction par passage à la limite. La classe 0 est formée des fonctions continues. La classe 1 est formée des fonctions discontinues, limites de fonctions continues. La classe 2 est formée des fonctions limites de fonctions de classe 0 et 1, mais n'appartenant pas à ces classes (par exemple la fonction caractéristique des rationnels de Dirichlet), et ainsi de suite, une fonction sera de classe n si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant aux classes 0, 1, 2, ..., n-1, et si elle n'appartient pas elle-même à ces classes. Il utilise ensuite la notion de nombre transfini pour définir la classe α, α étant un nombre transfini quelconque de la deuxième classe.

Il énonce le théorème de stabilité de l'ensemble de toutes ces fonctions par passage à la limite. Ces fonctions obtenues par un nombre dénombrable de passages à la limite sont représentables analytiquement. Mais les autres le sont-elles? Baire se le demande.

> *Il ne me semble pas inutile de réfléchir un peu à ces questions; ne peut-on pas espérer qu'on arrivera de cette manière à préciser dans quelle mesure il nous est permis d'employer la notion de "fonction arbitraire" ? Peut-être y a-t-il, par la nature même des choses, une limite dans la conception de fonction arbitraire, il s'agirait de voir quelle est cette limite.*

Cette classification soulève alors une controverse importante qui oppose à la manière purement logique dont Baire définit ses classes de fonctions, les questions de savoir s'il y a bien des fonctions dans chacune de ces classes, si on est justifié d'étudier des fonctions qu'on ne peut pas définir effectivement au sens de pouvoir calculer leur valeur pour chaque valeur donnée de la variable avec une approximation fixée, de pouvoir les décrire point par point. Ainsi Borel écrit de l'ensemble des fonctions discontinues ne prenant que les valeurs 0 et 1

> *Pouvons-nous , en effet, concevoir la fonction discontinue la plus générale d'une variable réelle (même en supposant que les seules valeurs de la fonction sont 0 et 1)? Il est nécessaire, en effet, pour donner une telle fonction, de donner sa valeur pour toutes les valeurs réelles de la variable. Or cet ensemble de valeurs n'étant pas dénombrable, il n'est pas possible d'indiquer un procédé qui puisse permettre de les avoir toutes, c'est-à-dire d'en atteindre une quelconque au bout d'un temps limité.*

On voit dans ces préoccupations poindre les idées sous-jacentes à l'étude future des fonctions calculables et des fonctions récursives.

Par ailleurs, la question du développement en séries de certaines fonctions continuera d'alimenter les travaux de nombreux mathématiciens. Lebesgue y donne suite dans une théorie de l'intégration qu'on pourra appliquer avec succès aux séries trigonométriques, aux équations intégrales, ... aux espaces fonctionnels. En effet, au fur et à mesure des derniers développements de l'analyse, on en est venu à considérer les fonctions comme des objets mathématiques en soi, des points de nouveaux espaces, les espaces fonctionnels. Influencé par la théorie des ensembles, on applique à ces espaces le vocabulaire géométrique, on y développe une topologie, on y utilise largement les méthodes de l'algèbre linéaire, c'est dans cet esprit que se développera l'analyse fonctionnelle du XX^{ème} siècle.

Nous n'aborderons pas ces développements car nous pensons avoir cerné convenablement les racines de la définition ensembliste du concept de fonction et le contexte de son utilisation pour les besoins de notre étude. Ce qui précède nous semble avoir largement prouvé que la définition dont on se sert, autant à l'élémentaire, au secondaire qu'au collégial, pour les fonctions, est complètement détachée de son contexte d'apparition. Il est clair que si la formulation utilisée dans notre enseignement est la même que celle de la sphère savante, l'ensemble des objets désignés par le mot dans une de nos classes n'a aucun élément commun avec celui des objets dont on faisait l'étude au moment de l'apparition de cette définition. Il n'est peut-être pas nécessaire d'aller plus loin dans l'histoire pour constater qu'on a là une création d'objet didactique avec perte du sens. Par ailleurs, l'histoire nous montre que c'est à partir des objets désignés par la définition que celle-ci prend son sens. Le pendant didactique de cette remarque est que c'est à partir des exemples et des contre-exemples que l'enseignement d'une définition prend son sens. Dans cet ordre d'idées nous pensons que nous devrions apporter le plus grand soin au choix de ces exemples et en particulier éviter pendant longtemps les cas limites et les cas pathologiques. Ainsi, l'exemple des fonctions constantes va à l'encontre de l'idée de variabilité et celui de la fonction identité va à l'encontre de l'idée de transformation. Ces fonctions, bien que l'expression algébrique en soit simple, ne nous semblent pas devoir être présentées avant que l'élève n'en voie la **nécessité**. En particulier la fonction identité n'est que rarement perçue par l'élève comme une parmi tant d'autres fonctions affines. Nous pensons qu'elle ne devient **indispensable** qu'après avoir vu la composition des fonctions et leur inversibilité.

2.3.5.4 Enseignement pour la didactique

Un usage pertinent du formalisme d'écriture

L'expression "fonction arbitraire" nous paraît être un bel exemple de cas où les problèmes qui ont motivé l'introduction d'un concept sont constitutifs de la signification de ce concept. Aussi il nous semble étrange de soupçonner que des élèves n'ayant étudié ni les intégrales indéfinies ni les équations différentielles, que ce soit dans le cadre du cours de mathématiques ou dans celui du cours de physique, puissent, sans autre préparation, avoir quelque idée de ce que signifie définir arbitrairement les valeurs d'une fonction ou choisir de façon arbitraire une fonction. La même question peut d'ailleurs se poser pour les enseignants, selon leur formation. Le concept de fonction arbitraire nous semble donc étranger au monde des mathématiques de nos élèves. Toutefois c'est un concept qui a été un moteur tellement puissant que nous pensons qu'il serait souhaitable à tout le moins de trouver un moyen, comme on l'a fait pour les questions de comportement local d'une fonction, d'ouvrir dans les connaissances des élèves un champ de validité de ces questions, leur permettant le cas échéant de voir venir le problème.

Examinons dans un premier temps le problème des cordes vibrantes et l'apparition des fonctions arbitraires. Il pourra sembler trivial de constater que les fonctions arbitraires dont on avait besoin pour résoudre l'équation $\partial^2y/\partial t^2=\alpha^2(\partial^2y/\partial x^2)$ avaient comme caractéristique commune que $y=\varphi(\alpha t+x)-\varphi(\alpha t-x)$ était solution de l'équation. Il nous semble que des problèmes semblables peuvent être trouvés sans avoir nécessairement à faire appel aux équations différentielles. Nous pensons en particulier aux familles de points ou de fonctions dépendant d'un paramètre pour lesquelles une condition particulière, analogue aux conditions aux limites, peut restreindre ou même éliminer une solution. Ces problèmes, qui donnent lieu à discuter la nature et le nombre de solutions selon la valeur ou les valeurs admissibles du paramètre, nous semblent être par rapport aux points ou aux fonctions, une bonne introduction à celui du choix d'une constante d'intégration ou d'une fonction arbitraire dans le contexte des équations différentielles. Or il nous semble possible, avec un peu de recherche, de trouver de tels problèmes pour un bon nombre de types de fonctions. On pourrait alors faire apparaître des problèmes de ce type, chapitre après chapitre, et aborder ainsi des problèmes de complexité croissante.

À propos de la définition ensembliste du concept d'application, il nous semble clair que le cadre conceptuel dans lequel elle est apparue, celui de la définition rigoureuse des nombres entiers, n'est pas accessible à la plupart de nos élèves en raison de leur peu de connaissances en algèbre. En conséquence l'enseignement de cette définition pourrait bien être un exemple de formalisme vide de sens dont les mathématiciens soucieux de rigueur, de la méthode et de la délimitation du domaine de l'analyse, comme Bolzano, Cauchy, Weierstrass et Dedekind, ont voulu s'éloigner en posant justement, entre autres, cette définition. Tout en ce domaine est question d'harmoniser la forme et le fond. À ce sujet nous sommes, comme Herscovics (1982), assez opposées à l'utilisation du formalisme des fonctions dans des exemples dont la petitesse fait que le formalisme est plus un embarras qu'autre chose. Il donne l'exemple de la taille de 3 homards, représentée dans une table, par un graphe sagittal et par un ensemble de couples pour amener finalement à la définition

> *Une fonction est une relation dans laquelle chaque élément du domaine est relié exactement à un élément de l'image.*

Dans ce cas, le formalisme utilisé n'apporte rien de positif, aucun bénéfice, il n'y a pas d'économie à considérer trois couples comme une fonction. Nous y voyons même le danger de faire naître à l'usage, le concept d'objet "créé et mis au monde par les enseignants de mathématiques pour embêter les élèves", alors qu'il serait précieux que l'élève, au contraire, soit un jour en mesure de faire le chemin du cas nombreux au cas fini, pour faire le lien entre la puissance d'un ensemble infini et le nombre d'éléments d'un ensemble fini.

L'utilisation d'un formalisme nous semble être pertinente quand elle sert à quelque chose, le plus souvent comme outil de support du raisonnement.

> *Un formalisme excessif contribue à rendre les choses difficiles. Mais l'absence de formalisme conduit à des confusions.*
> *Vergnaud, 1989b, p. 82*

2.4 LES LEÇONS À TIRER DE L'HISTOIRE

Nous avons vu le concept de fonction se former en cinq étapes. Le rôle et l'importance de ce concept sont remarquables. Il ne joue pas le rôle de premier plan, il n'est ni l'occasion ni le prétexte de grands développements, bien au contraire. Il est plutôt un des éléments qui constituent le substrat sur lequel se développent les connaissances mathématiques. Nous mettrions au même rang les systèmes de nombres et les opérations qui y sont définies, le concept de variable sur lequel on greffe celui de fonction et les opérateurs propres aux fonctions. Toujours présents en toile de fond, ces éléments de connaissance, par la variété de leurs capacités de représentation de relations et la souplesse avec laquelle ils s'adaptent aux problèmes à l'étude, assurent la cohérence de l'édifice malgré les ruptures que constituent les changements successifs de points de vue.

Il nous semble que d'instaurer dans le savoir enseigné une structure qui ne permettrait pas de transmettre ces deux qualités, la variété de leurs capacités de représentation de relations et la souplesse avec laquelle ils s'adaptent aux problèmes à l'étude, serait altérer, fausser le sens, dénaturer cette culture que l'enseignement des mathématiques vise à transmettre. En ce sens, il nous semble avoir perçu quelques indices d'un danger, dans notre enseignement comme dans d'autres approches.

Le premier indice porte sur la variété d'exemples de fonctions présentées aux élèves et en particulier sur l'ordre dans lequel on les présente. Il est certain que la classification d'Euler, sur laquelle est à peu de choses près calquée la présentation adoptée dans la plupart des manuels (fonctions entières, fonctions fractionnaires, fonctions irrationnelles explicites puis implicites et enfin fonctions transcendantes) donne a posteriori une vision satisfaisante de l'ensemble des fonctions les plus couramment utilisées, mais permet-elle de transmettre l'idée de la variété des capacités de représentation? Nous en doutons. Aussi suggérons-nous de revoir cet ordre. C'est le sens de nos recommandations visant à réviser l'insertion des fonctions trigonométriques à l'intérieur de notre séquence didactique et à exploiter pour les fonctions logarithmes le rapprochement avec le modèle affine et la transformation des suites géométriques en suites arithmétiques.

Le second indice porte sur la souplesse d'adaptabilité aux problèmes traités. Il nous semble que celle-ci tient au fait que les opérations qui sont propres aux fonctions, l'inversion, la composition et la décomposition, sont attachées à la fonctionnalité c'est-à-dire au caractère le plus général possible des fonctions.

Ne pas mettre en relief ces opérations nous semble un danger de ne pas transmettre la juste nature des fonctions. Or il semblerait que dans ce domaine, le principe que certains ont retenu des travaux de Polya de décomposer un problème en sous-problèmes plus simples, ait permis, et c'est regrettable, d'escamoter l'enseignement de ces opérations et de le remplacer par celui d'autant de cas particuliers qu'il est nécessaire. Nous suggérons de faire machine arrière, d'insister sur ces opérations et d'en mettre en évidence le caractère de généralité et la capacité à simplifier la classification des fonctions.

Par ailleurs, la représentation des opérations sur les fonctions comme étant des moyens d'obtenir de nouvelles fonctions à partir d'un nombre réduit de fonctions simples, outre qu'elle fait apparaître une structure sur l'ensemble des fonctions (et donc permet d'en développer une vision plus globale et une utilisation plus facile), permet aussi de poser les premiers jalons d'une vision unifiée des opérations et des fonctions. On pourra en effet facilement considérer la fonction qui fait correspondre à un couple de nombres sa somme ou à un couple de fonctions sa composée ou encore à une fonction sa réciproque. C'est ce que nous avons appelé auparavant "ouvrir dans les connaissances des élèves un champ de validité pour des questions futures".

Nous tirons de l'histoire une autre leçon qui touche moins à la toile de fond du développement et se situe à mi-chemin entre ces éléments de fond et ceux plus visibles qui forment les problèmes à l'étude. Nous pensons ici au rôle fondamental qu'a joué l'étude du comportement local des fonctions dans l'apparition des grandes questions des 18ème et 19ème siècles. Le concept de comportement local ne joue pas le rôle de substrat qu'a joué celui de fonction, mais il a servi de révélateur permettant la mise à jour d'un problème latent, celui de la nature des fonctions. Nous pensons que là aussi il y a lieu de chercher dans le cours de pré-calcul à créer des ouvertures vers des questions futures.

À nos yeux, l'utilisation dans l'enseignement des concepts mathématiques sous leur forme la plus abstraite, celle des définitions, semble satisfaire un besoin de cohérence calquée sur la cohérence apparente des mathématiques savantes une fois achevées. Toutefois, cette utilisation **en première approche** ne rend pas justice à la façon dont les mathématiques se développent. D'ailleurs les élèves ne sont pas à l'aise avec la définition ensembliste du concept de fonction quand elle est présentée dès le départ; nous en voulons pour preuve l'écart que nous avons constaté entre leur mémorisation de la définition et le peu d'utilisation qu'ils en font. S'il peut être souhaitable d'en venir à une formalisation de toute connaissance, encore doit-on le faire de façon à ce que cela vienne dans le processus de structuration des connaissances comme un **dernier échelon** sur un des niveaux conceptuels et que ce soit justifié par une utilisation subséquente dans la trame conceptuelle. Dans ce sens, il est possible que l'introduction de ce formalisme ne puisse se faire harmonieusement qu'après avoir travaillé quelque temps au niveau conceptuel supérieur.

3

Un Modèle de Compréhension

L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage.
Brousseau, Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques, p. 296.

Pour améliorer notre enseignement des concepts de variable et de fonction, nous voulons d'une part énoncer les intentions de chaque élément de la séquence didactique que nous utilisons et les liens explicites et implicites entre ces éléments. D'autre part, nous voulons examiner comment les élèves réagissent et plus précisément quel niveau de compréhension ils invoquent pour réaliser les exercices proposés. Enfin, nous voulons analyser le rôle que joue chaque leçon dans la structuration ou la consolidation des connaissances.

Sfard (1987) nous suggère de distinguer entre compréhension procédurale et compréhension structurale et ceci nous donne une première piste vers une grille d'analyse. Toutefois cette dichotomie nous paraît un peu sommaire pour rendre compte d'apprentissages que nous percevons plus nuancés, aussi avons-nous cherché un modèle de compréhension plus élaboré.

La didactique nous a fourni à la fois un cadre général et des modèles particuliers.

3.1 LA CONSTRUCTION DES CONNAISSANCES

Une des théories qui ont cours actuellement dans les milieux de l'éducation mathématique est le constructivisme. C'est une interprétation première des théories piagétiennes, féconde pour repenser les situations didactiques qui méritent de l'être. Kilpatrick (1987) discute de ce que pourrait être et de ce que lui semble être le constructivisme pour des enseignants de mathématiques. Il souligne que ce domaine de la connaissance se prête particulièrement bien à une lecture par le biais d'une théorie constructiviste. En effet, le rejet de l'idée d'un monde indépendant de la personne qui apprend et pré-existant en dehors de son esprit est plus facile dans ce domaine que dans celui d'autres disciplines expérimentales. Le mathématicien laisse de côté plus facilement qu'un autre l'idée de découverte et lui préfère alors celle de construction des concepts mathématiques.

Von Glasersfeld (1983) plaide dans ce cadre en faveur d'une théorie instrumentaliste de la connaissance selon laquelle l'esprit est façonné au fur et à mesure de l'organisation de son expérience de manière à pouvoir interagir avec un monde réel qui ne peut pas en soi être connu. Une telle théorie de la connaissance se préoccupe de l'accord entre la connaissance et l'expérience plutôt que de l'accord entre la connaissance et la réalité. Elle est basée sur deux principes. Le premier affirme que la connaissance est construite de façon active par la personne qui apprend et non pas passivement reçue de l'environnement. Le second décrit l'accession à la connaissance comme un processus d'adaptation qui consiste à structurer le monde de l'expérience, et non pas à découvrir un monde extérieur à la personne qui apprend.

L'accession à la connaissance serait alors un processus par lequel le sujet se construit un modèle viable du monde plutôt que d'absorber de l'information. Ce processus est celui qui fut décrit au départ par Piaget. Celui-ci tentait de rendre compte de la façon dont, à partir de nos sensations et à l'aide de nos opérations mentales, nous parvenons à construire tout un monde, celui de notre connaissance, par l'organisation du monde de notre expérience et de celui de nos structures mentales.

On peut faire un parallèle entre le développement global des connaissances et les développements cognitifs individuels.

Bachelard (1972) décrit la façon dont la connaissance scientifique progresse. D'après lui, l'élaboration des connaissances scientifiques exige de rompre avec les connaissances anciennes, en particulier avec ce qu'il appelle les "connaissances communes".

Bouvier (1986) reprend cette idée mais cette fois à propos de l'apprentissage individuel. Il souligne que nos sens nous trompent et que seule la réflexion peut nous aider à rompre avec notre connaissance première qui fait obstacle à la découverte scientifique. La question nouvelle qui permet de rompre avec la connaissance première, apparaît dans une situation qui semble paradoxale et provoque chez le sujet concerné ce que l'on nomme un conflit cognitif.

Bachelard oppose alors deux types de réactions qu'il nomme "instinct-conservatif" et "instinct-formatif". L'un fait appel aux réponses familières, encourage l'ordre établi, s'appuie sur des connaissances empiriques ou sociales (qui remportent un certain succès), laisse les connaissances non questionnées, développe les habitudes et accentue les préjugés tandis que l'autre, au contraire, valorise les questions, insiste sur les remises en questions, s'appuie sur la recherche et questionne la moindre connaissance.

Même si on a démontré que le développement de l'individu n'est pas le calque, en réduction, de celui de l'espèce humaine, il est légitime aujourd'hui de considérer qu'un élève apprend lorsqu'il construit une connaissance nouvelle dans une situation inattendue. Les enseignants doivent donc imaginer des situations susceptibles de favoriser des conflits.

Il faut aussi garder à l'esprit que les nouveaux modèles ne détruisent pas nécessairement les anciens, qu'ils peuvent cohabiter avec leur propre champ d'application, que les élèves n'arrivent pas avec l'esprit vierge et qu'ils peuvent, par les interactions qu'ils ont entre eux, créer eux-mêmes des conflits cognitifs, par exemple quand à l'intérieur d'une même équipe de travail on retrouve des élèves qui abordent le problème avec des points de vue conflictuels.

Toute une branche de la didactique se développe autour de la détermination des concepts et des modèles des élèves et constate souvent notre ignorance généralisée à ce sujet. Aussi Bouvier suggère-t-il d'admettre que les professeurs enseignent en aveugle et qu'ils proposent aux élèves des situations devant provoquer des besoins, des trous de savoir, pour qu'elles deviennent des occasions d'intégrer à leurs connaissances les concepts que l'on veut leur enseigner.

Le constructivisme étant une théorie de l'acquisition des connaissances n'en est pas une de l'enseignement ou de l'instruction. Toutefois, Von Glasersfeld (1983, 1988) constate que l'adoption de ce point de vue par un enseignant l'amène à modifier son approche. Il identifie cinq conséquences directes de l'adoption de ce point de vue:

- l'enseignement, c'est-à-dire l'utilisation de procédures dont le but est de générer la compréhension, se distingue fortement de l'entraînement qui consiste à développer des habitudes et à engendrer un comportement répétitif;
- les processus de pensée deviennent plus importants que les comportements;
- la communication verbale devient une manière de guider l'apprentissage de l'élève et non plus un moyen de transfert des connaissances;
- l'élève nous donne par ses réactions des moyens de comprendre les efforts qu'il fait pour comprendre, en particulier lorsque celles-ci ne sont pas conformes aux attentes de l'enseignant;
- les interventions d'enseignement tentent non seulement d'aider à la mise en place de structures cognitives nouvelles mais aussi de modifier celles qui sont existantes.

Ces cinq conséquences décrivent de façon pratique une attitude générale, une position a priori que peut prendre un enseignant face à l'acte d'enseigner. Nous reconnaissons dans cette description l'esprit dans lequel nous avons conçu la séquence didactique que nous étudions dans le présent document et la façon dont nous la gérons au jour le jour. Dans une tentative de décrire ce que pourrait être le constructivisme, Kilpatrick (1987) fait remarquer que cette attitude n'est pas l'apanage de ceux qui se réclament du constructivisme et que d'autres philosophies de l'enseignement peuvent aussi y mener. C'est en partie pourquoi nous trouvons plus facile de nous identifier à des pratiques qu'à une des étiquettes correspondantes. L'autre raison de notre réticence à nous identifier au constructivisme est notre manque de recul par rapport à cette théorie de l'apprentissage qui nous empêche d'y porter un regard sainement critique. Il nous semble trop souvent que ce que nous lisons comme étant "la" description du constructivisme est bâtie autour d'attitudes contre lesquelles nous ne pouvons pas nous élever à moins d'être contre la vertu. Malgré ces réserves, nous allons adopter le cadre de travail du constructivisme car c'est ce que nous avons trouvé de plus proche de notre conception et de notre pratique de l'enseignement.

Ceci constitue le cadre général, l'esprit dans lequel notre travail a été préparé et conditionne le choix d'un cadre d'analyse des résultats. Nous souhaitons centrer notre analyse sur les points importants de notre approche soit la compréhension des concepts, les processus de pensée, la confrontation entre les attentes de l'enseignant et les réponses des élèves et les occasions de restructuration des connaissances.

3.2 LA COMPRÉHENSION D'UN CONCEPT MATHÉMATIQUE

Les théories didactiques nous invitent à analyser le niveau de connaissance que l'élève invoque lors d'un exercice.

Vinner (1983) utilise une représentation des connaissances qui fait ressortir la nécessité d'un support intuitif précédant la phase de généralisation. Il utilise deux cellules distinctes pour décrire la structure cognitive, l'image du concept et la définition du concept. Le mot image réfère à l'ensemble des images mentales associées au concept dans l'esprit de l'apprenant incluant l'ensemble des propriétés associées à ce concept tandis que la définition du concept est le produit fini, la description complète acceptée par les spécialistes de la discipline. Ces cellules agissent l'une sur l'autre pour atteindre un haut niveau de performance. Vinner précise bien l'inefficacité d'un enseignement basé sur les définitions formelles.

Dans le même sens, Sfard (1987-1988-1989) affirme qu'il est inutile d'introduire une nouvelle notion mathématique à l'aide de la définition structurale en prenant pour acquis la spontanéité de la compréhension procédurale.

Nous avons choisi d'utiliser un modèle de compréhension de concepts développé par Bergeron et Herscovics (1982-1987-1989) qui, tout en distinguant comme Sfard un stade procédural et un stade plus abstrait, permet de pousser l'analyse plus loin en introduisant un stade intuitif et un stade formel. Ce modèle présente pour nous des difficultés. Il ne nous permet pas de rendre compte de toute l'information que contiennent les situations didactiques que nous proposons à nos élèves, toutefois nous ne saurions dire s'il s'agit d'une faiblesse de l'analyse ou du modèle. C'est un modèle récent, il sera probablement amélioré par ceux qui s'en serviront et nous ne voulons pas courir le risque de ne pouvoir tirer aucune conclusion en utilisant un modèle ad hoc.

3.3 LE MODÈLE DE COMPRÉHENSION DE BERGERON ET HERSCOVICS

Bergeron et Herscovics présentent en résumé leur modèle à la façon d'un tableau dont nous allons décrire les cellules.

Stade I	Compréhension intuitive - connaissance informelle - pré-concepts - pensée basée sur une perception visuelle - actions non quantifiées - approximations grossières
Stade II	Compréhension procédurale acquisition d'une procédure comme première construction du concept
Stade III	Abstraction - généralisation - invariance d'un objet matérialisée par sa conservation ou - réversibilité des opérations
Stade IV	Formalisation - utilisation d'un symbolisme - justification logique des opérations - découverte d'axiomes avec, dans tous les cas, abstraction préalable

Tableau I. Le modèle de compréhension de Bergeron et Herscovics

3.3.1 Premier stade: La compréhension intuitive

Ce stade est celui des connaissances développées spontanément et dont la structure serait informelle. Il s'agit des connaissances que l'élève rassemble au cours de son expérience quotidienne et de l'observation de son environnement. Bergeron suggère que cette connaissance se développe en dehors de tout enseignement formel. La qualité de cette perception peut varier d'un individu à l'autre ou encore d'un concept à l'autre selon la réflexion que chacun a faite sur son expérience. Par exemple, pour un jeune enfant, le monde de son expérience est constitué d'objets physiques et de ses propres actions sur ces objets, alors que pour un adolescent ou un jeune adulte, on peut ajouter une connaissance qualitative issue de la réflexion. Dans la mesure où l'enseignant envisage l'apprentissage comme une authentique construction intellectuelle, il doit considérer cette expérience comme point de départ. Bergeron suggère donc d'identifier ces mathématiques informelles comme le premier niveau de compréhension, celui de la **compréhension intuitive**.

3.3.2 Second stade: La compréhension procédurale

Bergeron souligne les limites de ces mathématiques informelles développées au stade intuitif qui ne permettent que des approximations qualitatives grossières. Selon lui, elles ne seraient qu'un point de départ pour le processus de mathématisation au cours duquel l'élève organise et coordonne cette connaissance informelle lors d'une phase de première quantification qui l'amènera à une plus grande précision. On passe de l'observation de faits au développement de procédures par la quantification, acquérant ainsi une connaissance plus détaillée et précise. Bergeron suggère que d'expliciter le lien entre les connaissances intuitives et les procédures mathématiques justifiera la nécessité de ces dernières et aidera à prévenir une mémorisation dénuée de sens. Dans l'optique d'une construction des connaissances par l'élève, il nous semble que cette construction ne se fera que si elle présente un intérêt dans l'économie du savoir de l'élève. En ce sens, un problème insoluble avec les connaissances intuitives, s'il est accepté par l'élève comme étant "à résoudre", fournira le seul type de lien efficace entre les connaissances intuitives et les procédures à développer. Toutefois, l'observation des élèves nous fournira des exemples de problèmes pour lesquels il n'est pas aisé de prévoir s'il sera plus économique pour un élève donné de continuer à travailler avec une connaissance vague ou de sentir le besoin de recourir à une procédure. Quant à ce fameux "besoin" mentionné par Bergeron et d'autres, il devra être ressenti par l'élève et non mis en évidence par le professeur; il donnera le sens sans lequel même la mémorisation ne se fera pas.

À ce stade, le traitement de l'information se fait cas par cas, sans vision globale. L'élève recherche un résultat numérique en utilisant les opérations appropriées et reprend les procédures à chaque fois. L'utilisation des algorithmes et l'application des formules sont les principales tâches exécutées à ce stade. C'est la caractéristique de la **compréhension procédurale**. En général ce type de compréhension amène la réussite mais pas nécessairement la compréhension de la réussite.

3.3.3 Troisième stade: L'abstraction.

La quantification, associée à un second niveau de compréhension, mène à la construction de concepts mathématiques. Ce sont des objets mathématiques, des relations entre ces objets, des transformations de ces objets et des combinaisons de ces objets pour en obtenir d'autres. Bergeron rappelle que la quantification ne doit être considérée que comme une phase **initiale** dans le processus de mathématisation. En effet, à cette étape l'élève confond le concept et la procédure qui conduit à sa construction, comme il confond le nombre et la procédure de comptage. Ce n'est que progressivement que le concept se précise et se distingue de la procédure, pour finir par avoir son existence propre dans notre esprit.

De notre point de vue, c'est essentiellement sur cette idée que Sfard fonde sa distinction entre conception procédurale et conception structurale.

De son côté, Bergeron nomme le passage de la procédure au concept, l'**abstraction**. Ce terme rappelle l'action de scruter une réalité désordonnée et d'en extraire la structure de ses caractéristiques les plus essentielles, ce qui aboutit au troisième stade de compréhension. Il souligne que selon Piaget deux types d'abstraction peuvent intervenir, l'abstraction empirique qui traite des propriétés physiques des objets, et l'abstraction réflexive ou logico-mathématique qui traite de ses propres actions et de leur coordination.

On est passé d'un grand nombre de connaissances particulières à une connaissance plus générale formée d'un nombre restreint de concepts et de relations par l'abstraction, et enfin on peut formaliser ces connaissances conceptuelles et s'en donner une représentation symbolique, concise et précise qui permettra une utilisation plus aisée de ces connaissances. La mise en relation d'objets, la distinction entre les objets et les opérations sont caractéristiques de ce stade. En général ce type de compréhension amène, en plus de la réussite, sa justification et le sens de sa nécessité.

3.3.4 Quatrième stade: La formalisation.

Dans le modèle que propose Bergeron, il y a un quatrième stade de compréhension qu'il appelle la **formalisation**, qui tient compte de la nature particulièrement symbolique des mathématiques. Il mentionne trois formes sous lesquelles ce niveau de compréhension peut se manifester. L'axiomatisation est une de ces formes, les preuves formelles en sont une autre, mais il inclut aussi l'aspect des représentations.

Quant à nous, dans la compréhension formelle, la représentation des objets mathématiques nous semble l'aspect le plus important pour l'enseignement collégial. Il s'agit ici de distinguer le **contenu** de la **forme**, l'**idée mathématique elle-même** et sa **représentation**. Pour les concepts vus dans les cours de pré-calcul et de calcul, nous avons de nombreux exemples de concepts que les élèves perçoivent, sur lesquels ils peuvent faire un certain nombre de calculs, pour lesquels ils distinguent les propriétés globales ou générales des propriétés particulières, mais qui posent des problèmes de notation importants. Bergeron nous met en garde contre une possibilité pour les élèves d'apprendre à manipuler un symbolisme qui est dénué de sens, et nous avons aussi observé le contraire, à savoir des élèves incapables d'apprendre à manipuler le symbolisme parce qu'ils nous semblaient ne pas avoir suffisamment bien maîtrisé le sens des objets censés être représentés par ce symbolisme. Nous pensons en particulier aux limites pour lesquelles l'écriture convenable pose d'importants problèmes.

La mise en garde complète de Bergeron est à l'effet de ne pas prendre la manipulation correcte du symbolisme pour un accès au stade de la formalisation tant qu'elle n'a pas été validée par une vérification qu'il y a eu abstraction au préalable.

Il nous semble que ce dernier niveau de compréhension permet à l'élève qui est passé par les trois stades précédents, de produire une verbalisation explicite et concise des définitions des concepts dont il a acquis la connaissance, des opérations qu'il sait effectuer et de la nature des résultats ainsi obtenus et des propriétés de ces objets. Cette phase de verbalisation nous semble dans certains cas être le moment propice pour situer ces connaissances qui semblent achevées dans un contexte plus global ou simplement sous un autre éclairage et provoquer ainsi le démarrage d'un nouveau cycle d'apprentissage. L'élève se trouve alors avec un discours qui n'est plus adapté à la situation. L'utilisation de l'ancien discours pour décrire la situation nouvelle donne une description approximative, vague, ne permet plus qu'une approche qualitative. On découvre alors la nécessité d'avoir avec ces nouveaux objets une phase exploratoire qui permettra une observation consciente, la collecte de données qualitatives...

Bergeron (1982) présente les grandes lignes d'une possible séquence didactique de l'enseignement du concept de fonction en identifiant le stade de compréhension que demanderait chaque élément de la séquence. Il conclut cette réflexion sur l'acquisition du concept de fonction en disant que de toute façon, quelle que soit la qualité de l'enseignement, comprendre la phrase "Soit f une fonction quelconque" sera toujours plus délicat que de comprendre "Soit x un nombre quelconque".

Or, si nous devions résumer notre intention du cours de pré-calcul en disant que nous souhaitons que l'élève en sorte en comprenant une phrase, ce serait sûrement la première, étant sous-entendu que la seconde irait de soi. Il nous semble bien que le but du cours de pré-calcul est justement le passage du nombre à la fonction. Ceci ouvre la porte à une analyse du second axe de développement que nous allons considérer, celui de la trame conceptuelle. Il ne s'agit pas là d'une séquence développementale dans laquelle l'atteinte d'un stade masque les conduites des stades précédents, mais la construction d'intuitions , de connaissances procédurales de même que les processus d'abstraction et de formalisation, peuvent s'accompagner de rejets ou de transformations de connaissances qui relèvent de la compréhension intuitive ou de tout autre stade. Ainsi, le développement d'une compréhension formelle est souvent l'occasion de modifier plusieurs des connaissances acquises. C'est à ce type de restructuration que nous pensons quand nous parlons de revisiter des connaissances antérieures.

3.4 LA TRAME CONCEPTUELLE

Nous voulons rendre compte de la nécessité d'utiliser et de modifier certains concepts pour en acquérir d'autres. L'examen du développement des concepts de variable et de fonction au cours de l'histoire nous a montré comment ceux-ci se sont constitués, comment ils ont évolué et en particulier comment on est passé d'une acception des termes à une autre, en fonction de quels problèmes à résoudre. Mais il est aussi ressorti que le développement de ces concepts est lié à celui de concepts qui, tout en étant voisins, ont trop d'importance propre pour être considérés comme des sous-concepts. Le concept de nombre et celui d'opérateur en sont des exemples. Ainsi, selon les époques, les concepts de variable et de fonction, tributaires et solidaires du contexte dans lequel ils sont utilisés, voient leur signification et leur connotation évoluer. C'est cette dépendance par rapport au contexte conceptuel que nous voulons cerner en introduisant la trame conceptuelle.

3.4.1 Le rôle de la trame conceptuelle dans une séquence didactique

Giordan (1983) voit dans l'analyse de la trame conceptuelle un moyen de définir le contenu et l'organisation du savoir à enseigner.

> *Dans quelles structures ou champs prennent-ils (les concepts) leur signification? Existe-t-il une hiérarchisation des concepts dans le cadre d'une discipline? Sont-ils des instruments de recherches ou des produits terminaux?etc.*
> *Il s'agit d'une dimension à introduire pour essayer d'approcher dans un domaine spécifique le contenu et l'organisation du savoir, en particulier les nœuds de relation entre les divers éléments. Il s'agit également de comprendre ses transformations quand il devient un objet d'application technique ou d'enseignement. (p. 29)*

Dans une démarche dont le but est d'analyser l'enseignement du concept de reproduction en biologie, Giordan propose une liste d'éléments à analyser pour établir le réseau conceptuel recouvert par le terme de reproduction.

> *Il (le travail à faire) comporte un inventaire des divers éléments rationnels, de leur mise en réseau interne, une recherche des relations externes, c'est-à-dire des autres concepts indispensables, qui donnent un sens, qui constituent le soubassement du champ conceptuel étudié. (p. 60)*

Il suggère de commencer par une étude des termes utilisés, de l'évolution de leur connotation, de leur contexte d'emploi et des questions auxquelles ces termes prétendent répondre. Il propose de procéder ensuite à une étude du contenu du concept, de sa construction, des difficultés et des lenteurs de cette construction, des champs conceptuels dans lesquels les concepts prennent leurs significations, les détours nécessaires et les conflits à surmonter.

Nous adapterons ce type d'analyse à l'objet de notre étude. En mathématiques, une même question peut être abordée dans différents contextes conceptuels selon, par exemple, que l'on s'intéresse aux nombres, aux symboles littéraux, aux fonctions, aux opérateurs ou à d'autres éléments de différents domaines conceptuels. Il nous semble courant que différents niveaux de questions soient ouverts en même temps. Selon les connaissances dont dispose la personne qui tente de répondre et selon la place qu'elle accorde à la question dans la structure de ses connaissances, elle invoquera pour y répondre des connaissances mettant en jeu des éléments d'un certain domaine mathématique. Prenons l'exemple de l'exercice classique en calcul qui consiste à étudier le signe d'une expression algébrique (celle d'une fonction dérivée le plus souvent), selon les valeurs de la variable. En général on présente les résultats des raisonnements intermédiaires ainsi que le résultat final dans un tableau de signes. C'est d'après la façon dont on remplit le tableau qu'il est possible d'identifier le domaine conceptuel dans lequel on s'est placé pour répondre. Si on calcule des valeurs numériques, on est dans le domaine des nombres et de l'arithmétique. Si on raisonne sur les zéros et la croissance ou la décroissance des facteurs du 1er ou du 2ème degré de l'expression, on est dans le domaine de l'algèbre et même peut-être dans celui des fonctions.

Des liens logiques sont tissés entre les domaines qui font que le développement de l'un a des conséquences sur les autres. Ainsi le concept de nombre qui sert à exprimer la variabilité est aussi la base des sous-concepts de domaine et d'image et intervient dans la définition des concepts de limite, de continuité et de convergence d'une série. Il en va de la même façon pour le concept d'opérateur. Si les opérations sur les nombres ou sur les lettres permettent de fabriquer des fonctions, ce sont les opérations sur les fonctions, les opérateurs, qui sont à la base de la classification d'Euler et qui se développent avec le calcul infinitésimal par la définition des opérateurs de dérivation et d'intégration pour finir avec l'introduction de l'inversion et de la composition.

De la même façon, quand on considère l'apprentissage des concepts, on ne bâtit pas sur le vide et des connaissances d'un domaine peuvent être invoquées pour construire celles d'un autre. Il s'agit du pendant pour l'édifice des mathématiques enseignées, de la cohérence interne des mathématiques savantes.

Il y a un aspect récursif à cette cohérence. En effet, elle existe aux différentes échelles auxquelles on peut examiner l'enseignement. Cohérence globale quand on examine l'ensemble d'un programme, elle devient plus particulière à l'échelle d'un cours et encore plus à l'échelle d'une séquence didactique. Des liens concept à concepts, d'autres concepts à cours et cours à programme assurent l'équilibre de l'ensemble et guident la navigation de l'élève à travers son apprentissage. Ces liens forment ce que nous appelons la trame conceptuelle.

Certains éléments de la trame conceptuelle sont définis en dehors de l'intervention de l'enseignant et celui-ci doit donc assurer à la fois une cohérence interne entre les différentes séquences didactiques de son cours et une cohérence avec le reste du programme. En ce sens, la trame conceptuelle dépend de l'enseignant et les différents exercices qu'il soumet aux élèves sont des appels de l'enseignant à ce que l'élève invoque des connaissances correspondant à certains stades d'abstraction. Comme la cohérence interne des mathématiques savantes, la trame conceptuelle ne se structure pas par une accumulation linéaire et séquentielle des connaissances mais plutôt par une suite de changements de point de vue conceptuels. Ainsi, au cours de son apprentissage des concepts de variable et de fonction, l'élève est mis en présence de problèmes concernant les nombres, le calcul numérique, le calcul littéral, les fonctions et les opérateurs. Il approfondit ses connaissances de ces quatre domaines de la trame conceptuelle: les domaines numérique, algébrique, fonctionnel et le domaine des opérateurs. La trame conceptuelle forme le second axe de développement.

3.4.2 Les différents domaines de la trame conceptuelle

Nous décrivons brièvement dans ce qui suit, les grandes étapes du développement de la trame conceptuelle rattachée au concept de fonction. Nous aurons l'occasion de préciser les caractéristiques de chaque domaine par la suite, à l'aide des exemples tirés de notre enseignement.

Premier domaine, l'arithmétique

Nous groupons sous ce titre l'ensemble des connaissances sur les nombres, les opérations définies sur les nombres et les relations entre les nombres. Une partie de ces connaissances est développée à l'élémentaire et au secondaire et sert de base à la construction de l'algèbre.

Second domaine, l'algèbre

On s'accorde en général pour considérer l'utilisation de symboles littéraux comme étant la caractéristique essentielle de l'algèbre. Ces symboles constituent une commodité de représentation pour des quantités inconnues ou variables, pour exprimer des équations, des relations et d'autres structures algébriques, pour développer des méthodes de calcul et de raisonnement. La simplification et l'évaluation d'expressions, la résolution d'équations ou d'inéquations et la représentation graphique de certaines relations, font traditionnellement partie de l'algèbre.

Troisième domaine, les fonctions

La distinction entre le second domaine et le troisième doit être précisée. On sera dans le second domaine quand les activités seront centrées sur la manipulation de variables ou d'expressions variables. On sera dans le troisième domaine dès que l'intérêt se portera sur l'idée de fonctionnalité et de dépendance. Il s'agit comme on l'a mentionné plus haut d'un changement de point de vue conceptuel. Les sous-concepts abordés seront ceux de domaine et d'image, les opérations seront les opérations algébriques habituelles (+, -, x, /) mais aussi l'inversion et la composition qui nous semblent typiques de l'idée de fonctionnalité. Il sera toujours pertinent de traiter des problèmes de représentation, d'examiner un large éventail de familles de fonctions et de procéder à des classifications et des comparaisons.

Quatrième domaine, les opérateurs

Dans la mesure où le cours de pré-calcul doit préparer au cours de calcul, il faudrait que l'élève le plus avancé puisse concevoir les fonctions comme des objets mathématiques sur lesquels des opérateurs peuvent agir pour obtenir d'autres objets de même nature. On pourra considérer l'addition bien sûr, mais aussi l'inversion, la composition et plus tard la dérivation.

3.5 LA GRILLE D'ANALYSE

Considérant que la connaissance se fait par construction avec des phases d'assimilation du réel, d'accommodation et de restructuration des connaissances, nous avons intégré les deux axes de développement de manière à pouvoir situer chaque apprentissage à la fois en fonction du degré d'abstraction et de sa place dans la trame conceptuelle. En ce qui concerne l'axe d'abstraction, nous considérons qu'à certains moments, selon l'apprentissage amorcé par l'élève ou selon le niveau de difficulté de l'exercice, il peut se produire un retour en arrière du degré d'abstraction invoqué par l'élève. Ce caractère récurrent nous incite à utiliser le vocable palier au lieu de stade. Nous voulons associer une idée plus dynamique aux repères de l'axe d'abstraction.

Nous obtenons donc une grille à double entrée dont chaque case correspond à un palier d'abstraction et à un domaine conceptuel. On retrouve sur une même ligne des apprentissages qui correspondent à un même domaine conceptuel et dont le degré d'abstraction va du plus concret au plus abstrait, dans une même colonne des apprentissages correspondant au même degré d'abstraction, mais pour lesquels les points de vue conceptuels sont différents. L'évolution se fait de la gauche vers la droite quand on progresse en abstraction, du haut vers le bas quand on adopte des points de vue conceptuels de plus en plus englobants. Globalement les séquences pédagogiques devraient faire cheminer l'élève de gauche à droite et de haut en bas. Toutefois, il est possible d'observer des retours en arrière, par exemple quand on reprend une même notion dans une nouvelle représentation. Ainsi, la maturation à un certain niveau sert de support intuitif au niveau suivant tandis que les premières mathématisations d'un niveau supérieur permettent à l'occasion de revenir à la formalisation du niveau précédent. Le tableau suivant résume l'intégration des deux axes de développement.

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Compréhension intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Compréhension formelle
Arithmétique				
Algèbre				
Fonctions				
Opérateurs de fonctions				

Tableau II. La grille d'analyse de la compréhension invoquée

En ce qui concerne l'utilisation de cette grille, d'autres lecteurs, face aux mêmes comportements pourraient les classer autrement, mais la grille sert surtout à préciser les exigences ou les conduites, tout en ayant en tête que ce n'est pas définitif. D'ailleurs, il est arrivé que nous n'ayons pu nous mettre d'accord et cela apparaît alors dans les grilles d'analyse.

4

Description et Analyse

des activités de laboratoire

> ***Le travail du professeur consiste donc à proposer à l'élève une situation d'apprentissage afin que l'élève produise ses connaissances comme réponse personnelle à une question et les fasse fonctionner ou les modifie comme réponses aux exigences du milieu et non à un désir du maître.***
> ***Brousseau, Les différents rôles du maître, p. 14***

Dans cette partie nous analyserons le jeu de manques et de conflits que nous avons tenté de mettre en place pour provoquer chez l'élève une construction des connaissances, ce que nous appelons les intentions de chacune des activités de laboratoire. La séquence didactique est bâtie à partir d'une conception des connaissances de l'élève et vise un changement de ces connaissances. C'est pourquoi nous situons cette analyse comme une observation de la relation entre la séquence et l'élève.

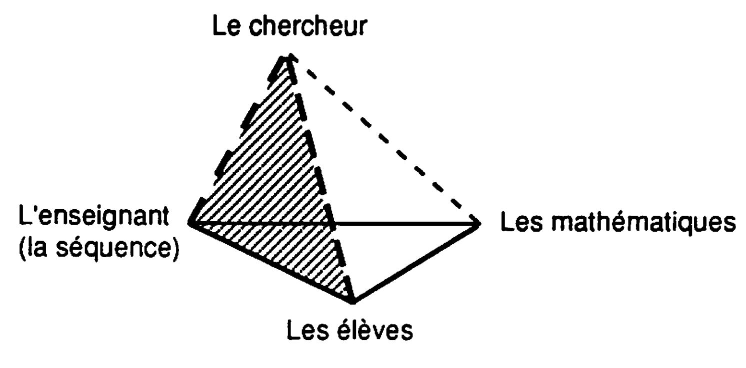


Figure 4. L'analyse des intentions de l'enseignant à travers la séquence didactique

Ces activités sont présentées aux élèves dans un cahier dont la table des matières est donnée en annexe (annexe nº1). Dans l'avant-propos, on explique aux élèves l'approche avec sa stratégie d'enseignement, on présente la structure du cahier et les attentes par rapport aux élèves en termes d'attitude et de travail. Plusieurs éléments de cet avant-propos ont été repris, dans une version pour enseignant-chercheur, dans les sections 1.1.3 et 1.1.4 du présent rapport.

Les activités de laboratoire occupent environ trente périodes de cinquante minutes d'enseignement sur les quatre-vingt périodes du cours. Les laboratoires d'enseignement assisté par ordinateur, il y en a 15 au Collège de Sherbrooke, dont 11 sont accessibles aux élèves inscrits à notre cours, sont équipés de 18 postes de travail compatibles avec la technologie IBM. Les élèves travaillent par équipes stables de deux. Les appareils sont reliés en réseau à une série de serveurs qui leur fournissent le langage Logo et gèrent les ressources d'impression (deux imprimantes par laboratoire). Nous utilisons IBM PC Logo, version 1.0, qui était distribué par Logo Computer Systems Inc. via les centres de vente IBM. Il s'agit d'une version anglaise du Logo. Nous avons inséré dans le fichier Startup une procédure de traduction des noms des primitives qui est une suite d'instructions COPYDEF dont l'effet est de créer, pour chaque primitive traitée, une copie de la primitive avec un nom français. Nous pourrions aussi nous servir de ce fichier pour ajouter des procédures pseudo-primitives.

Les activités de laboratoire sont coordonnées avec des périodes d'enseignement plus traditionnel. La programmation dans le temps est donnée à l'annexe nº2. C'est la longueur de ce document qui nous a incitées à le reporter en annexe afin de ne pas couper la lecture du présent chapitre. Toutefois, cette programmation dans le temps nous paraît importante et nous insistons auprès du lecteur pour qu'il en prenne connaissance. Un des faits à souligner est que les trois premières semaines de cours (environ 15 périodes) sont, dans la mesure du possible, exclusivement consacrées à des activités de laboratoire. Il s'ensuit que ce sont des activités dans lesquelles les élèves sont placés dans des situations nouvelles. Par la suite il arrive qu'on ajoute des activités d'application et de synthèse.

Dans l'analyse qui suit on trouvera pour chaque laboratoire:

1. La description telle qu'elle apparaît dans le cahier de l'élève: durée, contenu, objectifs cognitifs, éléments de syntaxe et de vocabulaire Logo, et la description des tâches à accomplir par l'élève.

2. L'analyse des tâches.
Dans le cas où les tâches relèvent du même domaine dans la trame conceptuelle, la nature de domaine est analysée en premier et on procède ensuite à l'analyse des différents paliers de compréhension que l'élève doit invoquer minimalement pour remplir chaque tâche. Dans le cas où les tâches sont plus diversifiées, on procède à l'analyse tâche par tâche.

Les résultats de l'analyse sont consignés dans un tableau-synthèse. Chaque tâche y est située dans une cellule du tableau qui correspond à l'intention que nous avons lorsque nous proposons cette tâche à l'élève. Si les différents paliers de compréhension reflètent l'activité de l'élève, et si les domaines dans la trame conceptuelle reflètent la structure mise par l'enseignant sur les concepts qu'il envisage d'enseigner à l'intérieur du contenu de son cours, la répartition à l'intérieur des cellules est le reflet de la stratégie adoptée par l'enseignant. On y retrouve donc la dynamique à trois: l'élève, le savoir et l'enseignant.

4.1 PREMIER LABORATOIRE: PROCÉDURES ET FICHIERS

Ce laboratoire d'une durée de deux périodes de 50 minutes est une introduction au travail sur le micro-ordinateur, il ne porte pas sur l'apprentissage des mathématiques.

La description du cahier est reproduite à la figure 8.

4.1.1 Description de la tâche

Dans ce laboratoire, les élèves reçoivent une procédure Logo qui est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

```
POUR DOUBLE :X
RETOURNE :X + :X
END
```

Il leur est demandé d'en construire quatre autres du même type. Sur ces cinq fonctions, les élèves apprennent les commandes de gestion du système Logo.

4.1.2 Analyse

Les objets mathématiques manipulés sont donc des fonctions et des variables mais le vocabulaire utilisé n'y fait pas référence. Nous portons l'attention sur les particularités du langage de programmation et sur les possibilités de calcul. Aussi, les élèves travaillent sur ces objets du **domaine fonctionnel** en invoquant le palier de la **compréhension intuitive**.

Palier d'abstraction Domaine de la trame conceptuelle	Compréhension intuitive	Comp. procédurale	Comp. abstraite	Comp. formelle
Fonctions	Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ représentées par des procédures. Variable réelle représentée par l'entrée de la procédure. Image d'une valeur de la variable représentée par le résultat de la procédure.			

Tableau III. Synthèse de l'analyse du premier laboratoire

PREMIER LABORATOIRE
PROCEDURES ET FICHIERS

Contenu	Editeur et espace de travail Définition d'une procédure Composition et sauvegarde d'un fichier Fusion de deux fichiers Destruction d'un fichier
Objectifs cognitifs	Identifier les rôles respectifs de l'éditeur et de l'espace de travail Comprendre l'aspect temporaire ou permanent des espaces de mémorisation
Objectifs psycho-moteurs	Identifier à tout instant l'espace dans lequel on travaille Passer de l'éditeur à l'espace de travail et vice versa Modifier la définition d'une procédure Enregistrer la définition d'une procédure Composer et sauvegarder un fichier Ramener un fichier dans l'espace de travail Cataloguer une disquette Détruire un fichier sur une disquette
Touches de contrôle	ESC DEL 8 2 6 4 ↑ ↓ → ← ← CTRL 6 , CTRL 4 et CTRL-Break F3 3 PgDn et 9 PgUp
Primitives	CATALOGUE CHANGEDISQUE DISQUE EDITE EFTOUT IMTS SAUVE GROUPE DETRUIS
Durée	deux périodes (consécutives)

1

Figure 8. Description du premier laboratoire dans le cahier

4.2 DEUXIÈME LABORATOIRE: CALCUL NUMÉRIQUE

La description du cahier est reproduite à la figure 10.

4.2.1 Description des tâches

On demande de travailler les changements d'écriture qui permettent de passer de l'une à l'autre des représentations suivantes:

a) la notation arithmétique comme dans -3 (-6 - 2) + 3(-2 + 5),

b) les primitives infixes comme dans -3 ×(-6 - 2) + 3×(-2 + 5),

c) les primitives préfixes comme dans SOMME PRODUIT -3 DIFFERENCE -6 2 PRODUIT 3 SOMME -2 5

d) le diagramme de plomberie comme la figure 9.

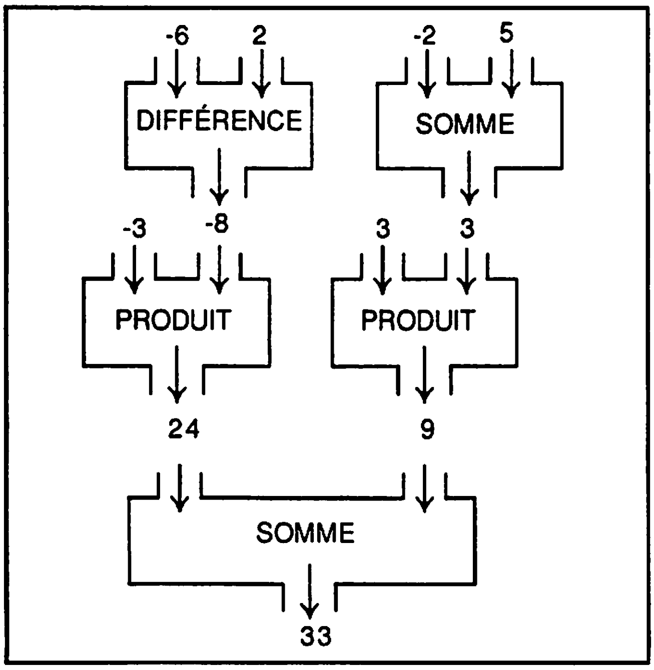


Figure 9. Diagramme de plomberie

e) la description textuelle comme "la somme du produit de -3 par la différence de -6 et 2, avec le produit de 3 par la somme de -2 et 5".
À chaque prédiction, on demande une vérification à effectuer dans l'espace de travail.

DEUXIEME LABORATOIRE
CALCUL NUMERIQUE

Contenu	Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Les opérations. Les Priorités des opérations
Objectifs cognitifs	Reconstruire les ensembles de nombres, les opérations. Distinguer les problèmes syntaxiques des problèmes sémantiques. Appliquer les règles d'évaluation des expressions de manière à écrire une instruction qui calcule une expression algébrique, à partir des primitives de calcul.
Primitives Logo	ARCTAN ARRONDIS COS DIFFERENCE et - EXP FPRECISION HASARD LN PRECISION PRODUIT et * PUISSANCE et P QUOTIENT et / RAC REHASARD RESTE SIN SOMME et +
Durée	deux périodes

15

Figure 10. Description du deuxième laboratoire dans le cahier

4.2.2 Analyse

Cette activité porte sur des objets du **domaine arithmétique** et vise à revoir les opérations sur les nombres et leurs propriétés.

Décoder une expression écrite en infixe, puis en préfixe, exige de tenir compte des conventions d'écriture. Coder en infixe une expression arithmétique demande uniquement d'expliciter toutes les opérations sous-jacentes. Ces exercices nous paraissent demander une **compréhension procédurale** avec un degré croissant de complexité parce qu'ils demandent d'appliquer des règles strictes de traduction d'un langage à l'autre et qu'ils peuvent tous s'appuyer sur une vérification ponctuelle dans l'espace de travail.

Par contre, la représentation d'une expression avec des primitives préfixes ou par un diagramme de plomberie nous semble mettre en jeu une réflexion sur son propre processus d'évaluation suivie d'un codage. Il s'agit d'identifier les opérateurs et leurs opérandes, puis de les représenter en respectant une certaine disposition linéaire dans le cas de l'expression préfixée ou encore une disposition spatiale (en arbre) dans le cas du diagramme de plomberie. Ce travail demande que l'élève invoque une **compréhension abstraite** des relations entre opérations et opérandes.

Nous avons de la difficulté à classer l'exercice qui demande de coder une expression décrite de manière discursive car les habiletés de lecture qui jouent un grand rôle dans cet exercice, sont maîtrisées de façon inégale chez les élèves.

Nous reprenons ci-dessous un exemple d'expression à coder:

7. À l'aide du glossaire écrire en Logo les expressions qui permettraient de calculer:

....

f) la racine carrée de la somme des carrés de la différence de 6 et 8, de celle de 4 et 6 et de celle de 5 et 7.

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Comp. intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Comp. formelle
Arithmétique		Décodage en préfixe et en infixe Codage en préfixe	Codage en préfixe Représentation d'une expression par un diagramme de plomberie	

Tableau IV. Synthèse de l'analyse du deuxième laboratoire

Troisième laboratoire
Calcul algébrique

TROISIEME LABORATOIRE
CALCUL ALGEBRIQUE

Contenu	Variable et fonction Image d'une valeur de x par la fonction f Domaine d'une fonction
Objectifs cognitifs	Appliquer les règles d'évaluation des expressions de manière à définir une procédure qui calcule une expression algébrique, à partir des primitives de calcul. Identifier, dans la représentation d'une fonction par une procédure, la partie qui représente la variable, celle qui représente la fonction et celle qui représente l'image d'une valeur de la variable par la fonction.
Syntaxe Logo	POUR et TO END valeur des variables
Durée	deux périodes

33

Figure 11. Description du troisième laboratoire dans le cahier

4.3 TROISIÈME LABORATOIRE: CALCUL ALGÉBRIQUE

La description du cahier est reproduite à la figure 11.

4.3.1 Description des tâches

Dans cette activité, nous proposons aux élèves d'utiliser des connaissances apprises lors du premier laboratoire (comment écrire une procédure et l'utiliser) et celles vues au deuxième laboratoire (comment écrire une expression arithmétique) pour écrire des procédures qui représentent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, pour la fonction définie par $f_1(x)=0{,}5x - 20$ on écrit

```
POUR F1 :X
RETOURNE 0.5 * :X - 20
END
```

ou

```
POUR F1 :X
RETOURNE DIFFERENCE PRODUIT 0.5 :X 20
END
```

Cette procédure calcule bien l'image par la fonction f_1 d'une valeur de x donnée en entrée. L'élève peut ainsi explorer à sa guise les valeurs de x admissibles.

Exemples d'exercices:

1. a) Écrire les procédures qui calculeront respectivement

$f_1(x)=0{,}5x-20$	$f_2(x)=(2x+5)^3$
$g_1(x)=\sqrt{3-x}$	$g_2(x)=\sqrt{x+2}+5$
$h_1(x)=15/(x^2-4)$	$h_2(x)=7/(5x-1)$

Ajouter ces procédures au fichier LAB3.

Les fonctions sont choisies de manière à soulever les questions d'algèbre pertinentes comme l'ordre de priorité des opérations et le choix des valeurs de la variable. On débouche ainsi sur la question du domaine. L'élève peut alors utiliser les messages d'erreur du système qui sont formulés en termes mathématiques très explicites pour explorer le domaine des fonctions.

Exemples des messages d'erreur:

en réponse à la demande MONTRE H1 -2

- Indivisible par 0 dans H1

en réponse à la demande MONTRE G1 16

- RAC n'admet pas -13 comme entrée dans G1.

Dans ce contexte, on présente des exercices pour déterminer le domaine d'une fonction.

b) Déterminer les domaines des fonctions.

c) Fabriquer une liste de valeurs de x devant illustrer, au sens où on l'a défini précédemment, les domaines de ces fonctions.

2. Reprendre les mêmes questions pour les dix fonctions suivantes.

(Il est inutile de reproduire ici ces dix fonctions, l'intérêt venant surtout de la variété des exemples.)

4.3.2 Analyse

Cette activité est essentiellement centrée sur l'**expression** de la fonction, c'est pourquoi nous la classerons dans le **domaine algébrique** et non dans le domaine fonctionnel. Les élèves connaissent les contraintes de calcul dans $\mathbb{R}$ ce qui les amène à exclure du domaine les valeurs de la variable qui annulent un dénominateur ou qui rendent négative une expression sous un radical d'ordre pair.

Le domaine est abordé en tant qu'ensemble des valeurs admissibles de la variable indépendante. L'élève peut toujours supporter son raisonnement par un retour au numérique. Le codage des fonctions et la détermination des domaines à partir de l'expression de la fonction nous semblent demander une **compréhension procédurale** de ces deux concepts.

La proposition des dix fonctions offre un vaste choix à l'élève. Cette variété d'exemples de fonctions peut développer une **compréhension intuitive** du **concept de fonction**.

Par contre, l'analyse est délicate pour les questions plus ouvertes. Par exemple,

Expliquer en vos propres termes

a) comment en Logo on définit une fonction,

b) comment en Logo on donne une valeur à la variable pour obtenir l'image de cette valeur.

L'élève peut répondre par un savoir-faire du **palier procédural** en expliquant la procédure de la manipulation physique à faire, ou par une analyse de représentation qui serait une réflexion sur une compréhension relationnelle donc du **palier abstrait** ou peut-être même **formel**. C'est effectivement une réflexion au moins abstraite qui était visée par l'exercice mais chaque élève lit la question selon son niveau de compréhension. Une réponse abstraite indique une compréhension abstraite mais une réponse procédurale ne donne aucun renseignement sur la possibilité d'une compréhension abstraite. Quant à la distinction entre l'abstrait et le formel, nous y voyons une difficulté que Bergeron et Herscovics ont bien soulignée, certains discours sur la forme ne garantissent pas la compréhension du fond. C'est une des difficultés de l'analyse que nous menons.

<table>
<tr><th>Palier d'abstraction

Domaine dans la trame conceptuelle</th><th>Comp. intuitive</th><th>Compréhension procédurale</th><th>Comp. abstraite</th><th>Comp. formelle</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Algèbre</td><td rowspan="2"></td><td>Codage de fonctions

Détermination du domaine

Illustration du domaine</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">?? Formuler les modes de représentation ??</td></tr>
<tr><td>Fonctions</td><td>Une fonction vue comme une procédure</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tableau V. Synthèse de l'analyse du troisième laboratoire

QUATRIEME LABORATOIRE
OPERATIONS SUR LES FONCTIONS
(CALCUL ALGEBRIQUE)

Contenu	Somme, différence, produit et quotient de deux fonctions Composée de deux fonctions Domaine des fonctions résultats
Objectifs cognitifs	En partant des procédures du troisième laboratoire, concevoir des procédures qui font des opérations sur les images par deux fonctions d'une même valeur de la variable. A partir de ces procédures identifier le domaine de la fonction résultat, généraliser et énoncer des règles liant le domaine de la fonction résultat et ceux des fonctions composantes. Concevoir une liste de valeurs de la variable qui illustrent le domaine trouvé.
Durée	deux périodes

Figure 12. Description du quatrième laboratoire dans le cahier

4.4 QUATRIÈME LABORATOIRE: OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS

Cette activité est une introduction numérique aux opérations sur les fonctions.

La description du cahier est reproduite à la figure 12.

4.4.1 Description des tâches

À partir de deux fonctions, l'élève doit calculer l'image par leur somme, leur différence, leur produit, leur quotient et leur composée, de quelques valeurs de la variable. L'élève aborde le problème en utilisant l'exemple de la procédure qui représente la somme des fonctions g_1 et h_1 et le diagramme correspondant. Les fonctions g_1 et h_1 ont été définies au laboratoire 3.

```
POUR  S1 : X
RETOURNE SOMME G1  : X  H1  : X
END
```

ou encore

```
POUR  S1 : X
RETOURNE  (G1  : X) + (H1  : X)
END
```

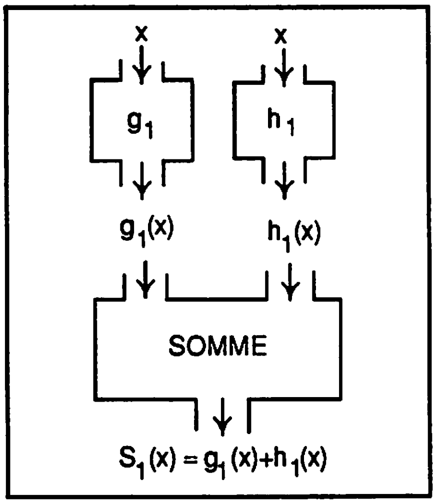


Figure 13. Diagramme de plomberie de la somme de deux fonctions

Après avoir codé les quatre opérations arithmétiques, l'élève reprend le problème pour la composition de h_1 et g_1. Le diagramme de plomberie de la figure 14 illustre le fonctionnement de cette opération et il est donné au moment où le codage est demandé.

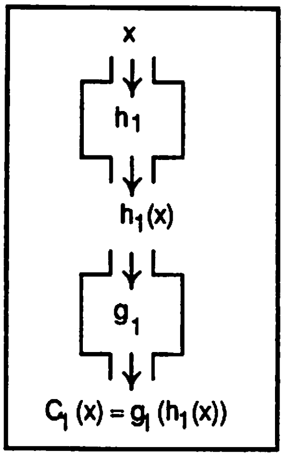


Figure 14. Diagramme de plomberie de la composée de deux fonctions

1. Définissez la procédure S1, utilisez ensuite les facilités d'édition pour définir les procédures D1, P1 et Q1.
2. Définissez la procédure C1 illustrée par le diagramme de plomberie.
3. Pour faire la mise au point de vos procédures vous avez demandé l'exécution des procédures S1, D1, P1, Q1 et C1 pour certaines valeurs de la variable. La question du choix de ces valeurs se pose. Chacune de vos procédures représente une nouvelle fonction puisqu'elle requiert en entrée un nombre (valeur de la variable) et qu'elle fournit en sortie soit un nombre (image de cette valeur de la variable par la fonction), soit rien du tout si on a choisi une valeur de la variable ne faisant pas partie du domaine.
Quel est le domaine de chacune de ces fonctions?
4. Si on change de fonctions g_1 et h_1 les domaines de g_1 et de h_1 vont changer mais les raisonnements sous-jacents au calcul du domaine de leur somme, de leur différence, de leur produit, de leur quotient et de leur composée vont demeurer les mêmes. Quels sont-ils?
a Quelles sont les deux conditions auxquelles x doit satisfaire pour qu'on puisse calculer $S_1(x)$?
Conclusion: le domaine de $S_1(x)$ est...

On demande ensuite de faire le raisonnement pour $D_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ et $C_1(x)$, puis on change les fonctions sur lesquelles on opère:

5. A partir des domaines de g_2 et h_2, trouver les domaines de S_2, D_2, P_2, Q_2 et C_2.

À la fin du texte de chaque laboratoire, il y a un espace réservé aux notes personnelles de l'étudiant. On suggère d'y mettre un résumé des éléments importants et c'est là qu'on pourrait s'attendre à retrouver la règle générale pour le calcul des domaines.

4.4.2 Analyse

Ces exercices visent à faire ressortir que la somme de deux fonctions est une fonction. Nous classerons cette activité dans le **domaine fonctionnel** et non plus algébrique car la représentation de la fonction ne se limite pas à l'expression algébrique. Le diagramme de plomberie supporte l'idée que chaque fonction est un objet sur lequel il est possible de calculer. Le résultat de ce calcul est une nouvelle fonction.

Les exercices de codage de la différence, du produit et du quotient nous semblent faire appel à une **compréhension procédurale** des opérations sur les fonctions. L'élève reprend le modèle de la procédure somme et garde la même structure. Les diagrammes de plomberie illustrent bien cette concordance de structure.

Par contre, même si le diagramme de plomberie de la composition est donné, l'élève fait appel à un autre stade de compréhension car il ne peut plus se fier au modèle de la procédure somme. En conséquence, nous classons cette activité de codage qui demande de combiner les fonctions dans une nouvelle structure, au **palier de l'abstraction**.

Dans le quatrième et le cinquième exercices, la fonction dont on cherche le domaine n'est pas donnée explicitement. Aussi, même si le domaine est toujours défini comme l'ensemble des valeurs admissibles, on doit établir une relation entre les domaines explicites des fonctions opérandes pour produire le domaine cherché. Cette relation est l'intersection pour l'addition, la soustraction et la multiplication, mais il faut ajouter une contrainte pour le quotient et reprendre le raisonnement au complet pour la composition. La nécessité de formuler la relation entre les domaines des fonctions combinées et celui de la fonction résultat nous amène à considérer que cette activité fait appel à une **compréhension abstraite**.

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Comp. intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Comp. formelle
Fonctions		Codage et représentation par diagramme de la différence, du produit et du quotient de deux fonctions Détermination des domaines de S1, D1, P1, Q1 et C1	Codage de la composée de deux fonctions Formulation de la relation entre les domaines des fonctions combinées et celui de la fonction résultat	

Tableau VI. Synthèse du quatrième laboratoire

CINQUIEME LABORATOIRE
SUITES DE VALEURS DE LA VARIABLE Y

Contenu	Suites de valeurs de la variable y. Suites croissante et décroissante.
Objectifs cognitifs	Ex plorer deux modes de variation, variation par addition d'une constante et variation par multiplication par une constante. Préciser l'influence de la valeur de la constante sur la rapidité et le sens de la variation. Formaliser les expressions "y est assez grand" et "y est assez petit", adapter ces expressions au mode de variation de y.
Syntaxe Logo	Les procédures récursives Les lignes d'arrêt Les expressions conditionnelles Les prédicats Les connectifs logiques Les commandes et les opérations
Primitives Logo	SI...[...] SI...[...][...] TESTE... SIVRAI[...] SIFAUX[...] = > < EGALP LISTEP MEMBREP MOTP NOMBREP VIDEP OU ET NON RETOURNE ECRIS STOP
Touche de contrôle	CTRL-Break
Durée	deux périodes

Figure 15. Description du cinquième laboratoire dans le cahier

4.5 CINQUIÈME LABORATOIRE: SUITES DE VALEURS DE LA VARIABLE Y

La description du cahier est reproduite à la figure 15.

4.5.1 Description des tâches

Cette activité est centrée sur deux modes de variation d'une variable y: par additions successives d'une constante, ce qui génère une suite arithmétique et par multiplications successives par une constante, ce qui génère une suite géométrique (ce vocabulaire n'est pas utilisé avec les élèves).

On voudrait que l'élève en vienne à contrôler la variation de la variable y.

Le laboratoire se présente en deux parties. Dans l'une, on expose une procédure avec deux moyens de la décrire (la simulation et la notation fonctionnelle), et une modification de cette procédure. Dans l'autre, l'élève doit à son tour produire de nouvelles procédures par modifications de celle qui est donnée et les décrire en reprenant la simulation et la notation fonctionnelle.

Pour le bénéfice du lecteur qui n'a pas le texte complet des activités de laboratoire à sa disposition, nous présentons ici, extraits du cahier, la procédure initiale, la procédure modifiée, deux exemples de notation fonctionnelle. La simulation de la procédure modifiée est donnée à la figure 16.

Procédure de départ:

```
POUR AUGMENTER :Y
ECRIS :Y
AUGMENTER (:Y + 1)
END
```

Procédure modifiée:

```
POUR AUGMENTER :Y :BORNESUP
SI :Y > :BORNESUP [STOP]
ECRIS :Y
AUGMENTER (:Y + 1) :BORNESUP
END
```

Exemple 1. Notation fonctionnelle pour une opération: la procédure F1 du lab 3.

Codage

```
POUR F1 :X
RETOURNE 0.5 * :X - 20
END
```

Entrée:
nom: *X*
nature : *un nombre quelconque*
signification : *valeur de la variable x dans $f_1(x) = 0,5x - 20$.*

Résultat:
nom: F1 : X
nature : un nombre
signification: valeur de $f_1(x)$ correspondant à la valeur de x donnée en entrée, on dit aussi image de x par la fonction f_1.

Exemple 2. Notation fonctionnelle pour une commande: la procédure AUGMENTER

Codage

```
POUR AUGMENTER :Y
ECRIS : Y
AUGMENTER (: Y + 1)
END
```

Entrée:
nom: Y
nature : un nombre
signification : première valeur de Y.

Effet:
imprime à l'écran la valeur donnée à Y en entrée ainsi que tous les nombres obtenus à partir de cette première valeur en ajoutant 1 à chaque fois, indéfiniment.

On demande à l'élève d'appliquer cette notation à la nouvelle version de la procédure AUGMENTER, puis on le guide pour modifier de nouveau cette procédure de la façon suivante:

1. Écrivez une procédure semblable à la procédure AUGMENTER de manière à ce que :Y augmente, non plus de 1 à chaque fois, mais d'un nombre arbitraire que vous appellerez :PAS (par analogie avec la longueur du pas d'un marcheur). Écrivez votre procédure ainsi que sa notation fonctionnelle pour procédure. Pour ne pas perdre la procédure AUGMENTER, vous devez donner un autre nom à cette nouvelle procédure.
2. Inspirez-vous de la procédure précédente pour écrire une procédure semblable dans laquelle :Y augmente non plus par addition d'un nombre arbitraire, mais par multiplication par un nombre arbitraire que vous appellerez :FACTEUR. Écrivez votre procédure ainsi que sa description selon la notation fonctionnelle que nous nous sommes donnée au début de ce laboratoire. Nommez-la AMPLIFIER.
3. Illustrez l'exécution de votre procédure en choisissant des valeurs pour les entrées, par exemple 1 comme première valeur de Y, 100 comme valeur de BORNESUP et 3 comme valeur de FACTEUR.
4. Écrire trois procédures analogues aux trois procédures sur lesquelles nous venons de travailler, mais dans lesquelles y diminuerait au lieu d'augmenter.

Enfin, on lui suggère des essais:
5. Dans l'espace de travail, essayer les procédures qui génèrent des suites croissantes ou décroissantes sur quelques entrées. Suggestions d'essais:

a) y=0	*bornesup=50*	*pas=5*
b) y=0	*bornesup=10*	*pas=0,5*
c) y=5	*bornesup=60*	*pas=3*
d) y=-5	*bornesup=50*	*pas=4*
e) y=30	*bornesup=50*	*pas=-2*
f) y=80	*borneinf=50*	*pas=2*
g) y=1	*bornesup=1024*	*facteur=2*
h) y=100	*borneinf=0,000975*	*facteur=2*
i) y=100	*borneinf=-10*	*facteur=1/2*
j) $y=2^{-10}$	*bornesup=1024*	*facteur=2*

PROCESSUS	EFFET PRODUIT
Y=1 BORNESUP = 5	
AUGMENTER 1 5	
SI 1 > 5 (FAUX).........	
ECRIS 1	1 à l'écran
AUGMENTER 1+1 5	
Y=2 BORNESUP = 5	
AUGMENTER 2 5	
SI 2 > 5 (FAUX).........	
ECRIS 2	2 à l'écran
AUGMENTER 2+1 5	
Y=3 BORNESUP = 5	
AUGMENTER 3 5	
SI 3 > 5 (FAUX).........	
ECRIS 3	3 à l'écran
AUGMENTER 3+1 5	
Y=4 BORNESUP = 5	
AUGMENTER 4 5	
SI 4 > 5 (FAUX).........	
ECRIS 4	4 à l'écran
AUGMENTER 4+1 5	
Y=5 BORNESUP = 5	
AUGMENTER 5 5	
SI 5 > 5 (FAUX).........	
ECRIS 5	5 à l'écran
AUGMENTER 5+1 5	
Y=6 BORNESUP = 5	
AUGMENTER 6 5	
SI 6 > 5 (VRAI) [STOP]	arrête et revient juste après l'appel de AUGMENTER 6 5.
....	
....	
END	revient juste après l'appel de AUGMENTER 5 5.
END	revient juste après l'appel de AUGMENTER 4 5.
END	revient juste après l'appel de AUGMENTER 3 5.
END	revient juste après l'appel de AUGMENTER 2 5.
END	redonne le contrôle à l'utilisateur qui avait commandé AUGMENTER 1 5.

Figure 16. Simulation de l'exécution de la procédure AUGMENTER.

4.5.2 Analyse

Observation des valeurs de y

Dans la mesure où l'élève commence par observer les valeurs de la variable, il travaille sur les **nombres (domaine conceptuel numérique)** et comme les suites observées au départ sont illimitées, il travaille aussi sur **l'infini**. Il doit limiter les suites de nombres pour éviter "d'aller jusqu'à l'infini". Il est aussi mis en présence de nombres infiniment petits quand, partant d'un nombre quelconque, il lui fait subir des multiplications successives par 1/2 par exemple. Dans ces deux types d'expériences, l'élève n'invoque qu'une **compréhension intuitive** des nombres infiniment grands et infiniment petits.

De plus, les suites de nombres obtenus, l'une par addition d'un nombre constant et l'autre par multiplication par un nombre constant, sont des suites les unes arithmétiques et les autres géométriques. Nous ne le précisons pas explicitement à l'élève mais nous pensons quand même que l'élève développe une certaine compréhension intuitive de ces deux objets.

Pré-concept de variable : variabilité dans les simulations

Dans les simulations, l'observation des valeurs de la variable y permet à l'élève d'aborder la notion de variabilité qui est sous-jacente à une conception dynamique du concept de variable. Dans la mesure où l'élève se centrera sur le concept de variable, on pourra dire qu'il y aura eu entre l'observation des valeurs et la simulation, un **changement de point de vue conceptuel** et qu'on est rendu dans le domaine de **l'algèbre**. La perception de la variabilité est à classer comme invoquant une **compréhension intuitive** du concept de variable.

Écrire une simulation d'une procédure demande une analyse pas à pas de l'exécution de cette procédure. Elle permet de mettre l'accent sur les moments et les manières des changements de valeurs de la variable ainsi que sur la condition d'arrêt. C'est un travail sur le concept de variable donc dans le **domaine algébrique**, qu'il est possible de faire en raisonnant sur les valeurs successives de la variable en imitant les modèles proposés. Cela requiert une **compréhension procédurale** du concept de variable.

Concept de variable: notation fonctionnelle

Pour inciter les élèves à détourner leur attention du numérique pour prendre un point de vue plus global, on leur demande de décrire chaque procédure selon le modèle de la notation fonctionnelle. Chaque description contiendra le codage de la procédure, la description (nom, domaine, signification) des entrées et la description du résultat pour les opérations (nom, domaine et signification) ou de l'effet produit pour les commandes. Ce travail sur la description de procédures, nous le classerons dans le **domaine conceptuel de l'algèbre**, car on y travaille le concept de variable. On verra que dans le laboratoire suivant, ce même travail relèvera plutôt du niveau fonctionnel parce qu'il traite de la variation simultanée de deux quantités variables.

Quant au palier d'abstraction invoqué ici par l'élève, il nous semble être de l'ordre de la compréhension procédurale parce que l'élève dispose d'un exemple qu'il peut imiter ou modifier. Il est possible que certains élèves ne s'inspirent pas beaucoup de l'exemple traité et procèdent à une abstraction. Plus tard dans la session, dans un contexte où l'élève sera laissé à lui-même, on pourra affirmer qu'il lui faudra alors procéder à une analyse de son propre raisonnement (incarné dans une procédure) et qu'il devra dans ce cas invoquer une **compréhension abstraite** du concept de variable.

Un autre aspect de cet exercice nous semble constituer un passage possible vers la compréhension abstraite. La variable y, telle que l'élève la manipule et la décrit, peut être vue comme un symbole unique, représentant potentiellement tout élément d'un domaine. Cette conception plus englobante du concept de variable est considérée dans plusieurs textes (Sfard, Bergeron, René de Cotret) comme plus abstraite que la conception dynamique mentionnée plus haut.

Retour à la variabilité

Les procédures qu'on demande à l'élève d'écrire sont des représentations de différents modes de variation de la variable y. L'élève se place donc dans des cas particuliers de variabilité qu'il quantifie. L'élève travaille sur le concept de **variabilité** au stade **procédural**.

Un pas vers la comparaison de différents modes de variation

Le dernier exercice consiste à choisir la bonne procédure, pour pouvoir utiliser des valeurs données des paramètres et ainsi obtenir une suite de valeurs à observer.

Certains exemples ne posent que le problème du choix de la procédure, d'autres sont choisis pour mettre en évidence qu'il y a des contraintes sur les paramètres ou que certaines suites sont plus courtes qu'on ne le prévoyait.

Par exemple, on ne peut pas générer une suite dont le premier terme est 100, dont le dernier soit proche de -10, par des multiplications successives de 100 par 1/2. Il faut 15 termes pour passer de -5 à plus de 50 par des additions de 4, alors qu'il ne faut que 10 termes pour passer de 2 à 1024 par des multiplications par 2.

Cet exercice nous semble ouvrir la porte sur la notion de vitesse de croissance et la nécessité de faire intervenir une autre variable, en bref sur le **domaine fonctionnel** en restant au **palier intuitif.**

Palier d'abstraction / Domaine dans la trame conceptuelle	Compréhension intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Comp. formelle
Arithmétique	Observation de valeurs infiniment grandes ou infiniment petites de y. Suites arithmétiques et suites géométriques			
Algèbre	Variabilité: observation des différentes valeurs de y dans les simulations	Rédaction d'une simulation Codage de différents modes de variation	Description des entrées d'une procédure: notation fonctionnelle Variable vue comme symbole unique représentant potentiel de tout élément d'un domaine	
Fonctions	Vitesse de croissance			

Tableau VII. Synthèse de l'analyse du cinquième laboratoire

SIXIEME LABORATOIRE
MODELE LINÉAIRE OU EXPONENTIEL?

Contenu	Comparaison des modes de croissance linéaire et exponentiel
Objectifs cognitifs	Générer des couples (x, f(x)) dans lesquels f(x) varie par rapport à x soit de façon linéaire soit de façon exponentielle. Identifier dans un contexte les données qui correspondent à la pente d'une fonction linéaire, ou à la base d'une fonction exponentielle, et aux coordonnées d'un point. Exprimer les grandeurs dont on a besoin en fonction des données pour générer une liste de couples qui permette de répondre à une question précise. Tracer un graphe cartésien des fonctions étudiées.
Syntaxe Logo	Construction de liste
Primitives Logo	LISTE PHRASE
Matériel nécessaire	Matériel pour tracer des graphes (papier quadrillé, règle graduée, crayon à mine et gomme à effacer).
Durée	deux périodes

77

Figure 17. Description du sixième laboratoire dans le cahier

4.6 SIXIÈME LABORATOIRE: MODÈLE LINÉAIRE OU EXPONENTIEL?

La description du cahier est reproduite à la figure 17.

4.6.1 Description des tâches

Ce laboratoire est la suite du laboratoire précédent dans lequel on a fait varier une quantité y selon deux modes : par additions successives d'une constante puis par multiplications successives par une constante. On y reprend l'idée de vitesse de croissance de y et on la quantifie. L'idée de départ est de compter combien il faut d'étapes à y pour passer par exemple de 0 à 100 dans chacun des deux modes. On introduit donc une seconde variable x qui compte les étapes. Les procédures AUGMENTER et AMPLIFIER doivent être modifiées. L'élève apporte les modifications nécessaires à chacune et complète la notation fonctionnelle. Comme effet produit par ces procédures, l'élève observe une liste de couples (x,y) qu'il peut représenter sur un graphe cartésien (à la main). Il résout des exercices purement numériques.

Nous en reprenons certains à titre d'exemple.

1. a) Quelle instruction doit-on donner pour obtenir une liste de couples (x, y) dans laquelle x varie de 0 à 10 et y varie de 0 à 50 par pas de 5?
b) Faire sortir cette liste sur l'imprimante en tapant Shift et Print Screen simultanément.
c) Représenter ces points sur un graphe cartésien.
d) Sur quelle courbe caractéristique ces points se trouvent-ils?
e) En quel(s) point(s) cette courbe coupe-t-elle chacun des axes de coordonnées?
f) Quelle est l'équation de cette courbe?

9. a) Quelle instruction doit-on donner pour obtenir une liste de couples (x, y) dans laquelle x varie de 0 à 10 et y varie de 1 à 1024 en doublant à chaque étape?
b) Faire sortir cette liste sur l'imprimante en tapant Shift et Print Screen simultanément.
c) Représenter ces points sur un graphe cartésien.
d) Relier ces points par une courbe. Est-ce une droite?

L'exercice peut être proposé dans un contexte issu du monde physique :

4. L'expérience montre que la production d'œufs dans la région croît de façon linéaire. Elle était de 700 000 caisses en janvier 1960 et de 950 000 caisses en janvier 1970, de combien augmente-t-elle par semestre?
a) Quelle instruction doit-on donner pour obtenir une liste de couples (date, production) dans laquelle la date varie de 0 à 20 semestres et la production varie de 700 000 à 950 000 caisses?
Suggestion: l'entrée dont la valeur est l'augmentation de la production par semestre peut être donnée sous forme d'une expression à calculer par l'ordinateur plutôt que de la calculer soi-même.

D'autres exercices suggèrent l'interpolation.

12. a) Quelle instruction doit-on donner pour obtenir une liste de couples (x, y) dans laquelle x varie à partir de 0 et y varie de 40 jusqu'à avoir diminué de moitié en étant multiplié par 0,95 à chaque étape?
b) Faire sortir cette liste sur l'imprimante en tapant Shift et Print Screen simultanément.
c) Représenter ces points sur un graphe cartésien.
d) Relier ces points par une courbe. Est-ce une droite?

On demande aux élèves de faire le lien entre les suites de couples et les fonctions f(x) =mx+b d'une part et $f(x) = A \times b^x$. d'autre part.

L'exercice suivant consiste à prendre deux couples (x, y) issus d'un contexte quotidien et à explorer les deux hypothèses de mode de croissance. :

> *16. Le nombre d'étudiants au Collège de Sherbrooke était de 1500 en 1968, et il est passé à 4500 en 1986.*
> *Deux administrateurs étudient la croissance de cette population.*
> *Le premier fait l'hypothèse suivante:*
> *H1: Le nombre d'étudiants au Collège de Sherbrooke est une fonction linéaire du temps.*
> *a) À partir de cette hypothèse calculer le nombre d'étudiants au Collège de Sherbrooke en 2004.*
> *b) Calculer en quelle année le nombre d'étudiants atteindra 6000.*
>
> *Le second fait l'hypothèse suivante:*
> *H2: Le nombre d'étudiants au Collège de Sherbrooke est une fonction exponentielle du temps.*
> *c) À partir de cette hypothèse calculer le nombre d'étudiants au Collège de Sherbrooke en 2004.*
> *d) Calculer en quelle année le nombre d'étudiants atteindra 6000.*

Cet exercice est complété par un exercice qui demande à l'élève de trouver lui-même un phénomène à traiter de cette façon. Enfin, on suggère à l'élève de comparer croissance linéaire et exponentielle.

4.6.2 Analyse

Le **domaine conceptuel** en jeu est clairement le **domaine fonctionnel**. On met de côté l'idée de dépendance qui apparaissait dans les fonctions données par une règle de correspondance du type f(x) = 0,5x - 20 au profit de l'idée de relation qui apparaît par l'intermédiaire des couples dans la tabulation. On veut éveiller l'élève à la possibilité qu'une fonction soit donnée autrement que par une formule et ouvrir le chemin vers la définition d'une fonction comme un ensemble de couples satisfaisant à la condition d'unicité de l'image. Du point de vue conceptuel, ce laboratoire ouvre la porte sur **plusieurs concepts** et **sous-concepts**. Si on considère l'ensemble des exercices, on constate que la démarche globale consiste à comparer les fonctions linéaire et exponentielle. En effet, les images par une fonction linéaire de valeurs équidistantes de la variable forment une suite arithmétique, alors que leurs images par une fonction exponentielle forment une suite géométrique. La comparaison de ces deux types de suites a été faite au laboratoire précédent. Ce rapprochement n'est pas habituel dans la trame conceptuelle adoptée dans les différents manuels d'enseignement. La fonction linéaire est enseignée très tôt parmi les différents types de fonctions, elle est présentée comme étant particulièrement simple et comme très liée aux concepts d'ordonnée à l'origine et de pente. La fonction exponentielle est enseignée très tard, elle est perçue comme particulièrement difficile et ayant peu, ou pas de rapport avec les fonctions polynomiales simples.

Nous avons voulu profiter de la bonne connaissance que les élèves ont de la fonction linéaire pour introduire la fonction exponentielle par analogie.

Les concepts **d'ordonnée à l'origine** et de **pente** sont placés dans un contexte conceptuel plus global que celui de paramètre dans une équation $y=mx+b$.

L'**ordonnée à l'origine** est présentée comme étant la valeur de f(x) pour x=0, quelle que soit la fonction considérée, avec comme cas particuliers $y=m\times 0+b=b$ pour la fonction linéaire et $y=A\times b^0=A$ pour la fonction exponentielle.

La pente est présentée dans le contexte global de la question "qu'arrive-t-il à f(x) quand x augmente de 1?" Dans le cas de la fonction linéaire, f(x) augmente de la pente quand x augmente de 1 $(f(x+1) = (f(x)+m)$ et dans le cas de la fonction exponentielle, f(x) est multiplié par la base quand x augmente de 1 $(f(x+1)=f(x)\times b)$

Il nous a semblé que cette présentation offre deux avantages. Le plus important est le fait de donner un sens à la fonction exponentielle et à la fonction linéaire. L'élève pourra par la suite reconnaître qu'une fonction est linéaire si l'accroissement de la variable entraîne un accroissement constant de l'image, alors qu'elle sera exponentielle si un accroissement de la variable entraîne une multiplication de l'image par une constante.

Le second avantage est de présenter les fonctions avec une approche plus locale que globale des propriétés, ce qui dans un cours de pré-calcul peut au moins éveiller l'élève à cet ordre de préoccupations qu'on développera dans le cours de calcul.

Construction des procédures

La construction des procédures demande que l'élève transforme les procédures du laboratoire précédent de trois façons :

1) Qu'il remplace l'affichage de la valeur de y par l'affichage d'un couple (x, y).
2) Qu'il fasse augmenter x de 1 à chaque affichage, tout en laissant y évoluer de la même façon qu'au laboratoire précédent.
3) Qu'il décrive le rôle de x et de y indépendamment et l'un par rapport à l'autre.

Il nous semble que cela requiert de l'élève une analyse de la relation de la variable y qui est explicite, à une variable analogue au temps qui était implicite et que l'élève explicitera. Pour y arriver, l'élève devra invoquer une **compréhension abstraite** de la variation de y dans le temps. La notation fonctionnelle qui accompagne la construction de chaque procédure facilite le passage à ce stade de compréhension.

Exercices numériques ou issus du monde physique

Ces exercices demandent à l'élève de choisir un mode de croissance et d'attribuer les bonnes valeurs aux différents paramètres. Dans certains exercices, il doit simplement extraire ces valeurs des données du problème, dans d'autres, il doit les calculer (ou les faire calculer par l'ordinateur) à partir des données du problème. Dans l'un et dans l'autre cas, il nous semble que l'élève invoque une **compréhension procédurale** en le faisant.

Exercices de lien avec les équations

L'exercice qui propose de faire le lien entre fonction linéaire et augmentation constante, entre fonction exponentielle et multiplication par une constante est au palier de la **compréhension abstraite**. On n'aborde pas la question de savoir si d'autres fonctions ont les mêmes propriétés. Or, juste de comprendre que la question se pose demanderait une compréhension formelle du lien puisqu'il s'agirait de distinguer entre "toute fonction linéaire est telle que $f(x+1)=f(x)+m$" et "seules les fonctions linéaires sont telles que $f(x+1)=f(x)+m$". On ne peut pas dire qu'il s'agit d'une compréhension formelle.

Exercice de comparaison de deux fonctions dans un contexte issu du monde physique.

À partir de deux couples issus du monde physique, cet exercice demande de faire successivement deux hypothèses et de juger ensuite laquelle est la plus plausible. La nécessité de poser une hypothèse et d'en changer par la suite demande une **compréhension formelle**. La comparaison des résultats et l'évaluation des deux hypothèses demande une **compréhension abstraite**.

Cet exercice est complété par un autre dans lequel il est demandé à l'élève de trouver une situation de la vie courante qui se prêterait au même traitement et de faire ce traitement. On demande ici de reconnaître un phénomène variable qui pourrait être interprété comme une fonction, de faire l'hypothèse qu'il varie de façon linéaire et de décrire les conséquences, de recommencer avec l'hypothèse exponentielle. Pour juger de la pertinence des deux hypothèses, il doit aller chercher des valeurs antérieures ou postérieures de la variable. Tout ceci demande de faire un grand nombre de relations entre le monde physique et celui des fonctions. Nous pensons que l'élève est sollicité au **palier formel** puisqu'il doit faire des liens dans un sens (appliquer des connaissances mathématiques à une situation concrète) et dans l'autre (reconnaître dans son environnement un phénomène qu'on puisse décrire avec certains concepts mathématiques et aller chercher dans cet environnement des éléments de référence pour juger de la valeur de résultats mathématiques).

Exercice de comparaison des croissances linéaires et exponentielles

Cet exercice vise à extraire de toutes les comparaisons que l'élève a faites au cours du laboratoire, la règle générale et qualitative qu'une exponentielle finit toujours par croître beaucoup plus vite qu'une fonction linéaire. Ceci demande à l'élève de procéder à une **abstraction** qui par son caractère qualitatif pourra servir de point de départ à une quantification au moment du cours de calcul.

Nous avons mentionné l'exploration de la propriété de densité des nombres réels, des nombres infiniment petits et infiniment grands dans le laboratoire 5. Nous pensons que le laboratoire 6, qui demande d'utiliser ces nombres, constitue une importante consolidation de ces propriétés de $\mathbb{R}$. À moins que peut-être on doive le considérer comme une mise en place plus claire d'un conflit cognitif entre la connaissance ancienne de ces nombres (tous les réels sont entiers ou presque...) et une connaissance nouvelle?

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Comp. intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Compréhension formelle
Fonctions: Concept de fonction linéaire, sous-concept de pente Concept de fonction exponentielle, sous-concept de base Concept d'ordonnée à l'origine Concepts de croissance et de rythme de croissance		Exercices numériques ou issus du monde physique: choix de la procédure et attribution des valeurs aux paramètres	Construction des procédures: ajouter la variable x, assurer la variation de x, situer x par rapport à y Notation fonctionnelle pour les procédures modifiées Lien entre augmentation constante et fonction linéaire, entre multiplication par une constante et fonction exponentielle Évaluer les hypothèses linéaire et exponentielle dans un problème issu du monde physique Comparaison générale des croissances linéaires et exponentielles	Exercice de comparaison des deux fonctions dans un contexte issu du monde physique: poser une hypothèse et en tirer des déductions, changer d'hypothèse et recommencer Reconnaître et traiter une situation de la vie courante

Tableau VIII. Synthèse de l'analyse du sixième laboratoire

4.7 SEPTIÈME LABORATOIRE: MODÈLE POLYNOMIAL, SUITES DE VALEURS DE F(X)

La description du cahier est reproduite à la figure 18.

4.7.1 Description des tâches

Ce laboratoire a été conçu pour être à la fois la suite des deux laboratoires précédents et l'ouverture vers le passage qui va des fonctions tabulées au graphe cartésien.

Dans une première partie, on cherche à élargir le domaine des fonctions dont il est facile de caractériser le comportement quand la variable passe de la valeur x à la valeur x + 1. On examine une quantité y qui augmente d'une quantité linéaire en x, quand x augmente de 1 (ce sont les fonctions du second degré) et on procède à une généralisation aux polynômes.

Bien que cette partie semble ouvrir sur les relations entre une fonction et sa dérivée, nous avons décidé de ne pas la traiter pour avoir plus de temps à mettre sur d'autres parties.

Dans une seconde partie, on utilise le même principe d'affichage de couples que dans le laboratoire précédent, mais appliqué à la tabulation d'une fonction donnée par son expression en fonction de x. L'élève doit adapter le principe du sixième laboratoire en deux étapes

1) Remplacer l'affichage du couple (x, y) par celui du couple (x, f(x)).

2) Décrire le nouveau rôle de x qui consiste d'une part à être le premier terme du couple affiché et d'autre part, à servir d'argument pour le calcul du second terme, f(x). Par exemple,

> *4. Dans l'éditeur à partir de la procédure AUGMENTER écrire la procédure SCRUTER qui imprimera à l'écran le couple (x, $f_1(x)$) pour la valeur de x donnée en entrée ainsi que pour tous les nombres obtenus à partir de cette première valeur en ajoutant 1 à chaque fois, jusqu'à ce que X atteigne la valeur donnée à BORNESUP en entrée. Puis, dans l'espace de travail, essayer la procédure SCRUTER.*

Dans une troisième partie, on pose la question de savoir quoi faire quand on change de fonction. En effet, la procédure précédente permet de scruter les valeurs d'une certaine fonction, mais doit être modifiée dès qu'on change de fonction.

> *1. Vous sauriez probablement écrire une procédure analogue à la procédure sur laquelle nous venons de travailler, mais dans laquelle on scruterait $g_1(x)$ au lieu de $f_1(x)$. Toutefois ce serait beaucoup de travail, sans compter que si vous le faites pour $g_1(x)$, il faudra probablement le faire aussi pour $h_1(x)$, $f_2(x)$, $g_2(x)$ et $h_2(x)$. Auriez-vous une idée qui permettrait d'obtenir le même résultat, sans avoir à écrire d'autres procédures? Expliquez comment:*

SEPTIEME LABORATOIRE
MODELE POLYNOMIAL
SUITES DE VALEURS DE LA FONCTION F(X)

Contenu	Exploration du mode de croissance des fonctions polynomiales Influence de la variation de x sur les valeurs de la fonction f(x)
Objectifs cognitifs	Adapter le mode d'analyse mis au point sur le modèle linéaire à l'étude des autres fonctions polynômiales. Générer un ensemble de couples (x, f(x)) pour une fonction dont on connait l'expression. Explorer la possibilité de généraliser le procédé précédent.
Syntaxe Logo	Sous-procédures
Matériel nécessaire	Matériel pour tracer des graphes (papier quadrillé, règle graduée, crayon à mine et gomme à effacer).
Durée	deux périodes

Figure 18. Description du septième laboratoire dans le cahier

4.7.2 Analyse

Tabulation des valeurs d'une fonction

Cet exercice fait ressortir le **rôle de la variable dans le cadre de l'étude des fonctions**. Nous le classerons dans le **domaine fonctionnel**.

Pour faire cet exercice, l'élève part d'une procédure déjà existante et doit remplacer la variable y par une procédure qui calculera f(x) en fonction de x. Il doit comprendre que le contrôle des variations de f(x) n'est plus explicitement sur y, mais repose sur les variations de x. Il doit supprimer le contrôle sur y et doit ajouter un étage à la structure, au bon endroit et avec les bons paramètres.

À cause du fait qu'il doit modifier les relations entre x et son image, et harmoniser les conséquences de ces modifications, il nous semble que cela met en jeu une **compréhension abstraite** des rôles respectifs de la variable, de son image, des variations de la variable et de celles de son image.

Généralisation à la tabulation de toute fonction

La procédure précédente permet de scruter les valeurs d'une certaine fonction, mais doit être modifiée dès qu'on change de fonction. On demande à l'élève de généraliser le processus à toute fonction. Il peut répondre de deux façons différentes. Il peut proposer au **palier procédural** des modifications locales successives de la procédure, mais il peut aussi proposer au **palier abstrait** (et même peut-être **formel**) de représenter la fonction par une variable à laquelle on donnera différentes valeurs selon les besoins. Il est clair que cette **généralisation** se passe au moins au palier abstrait, mais comme il s'agit de **proposer une représentation**, nous pensons que pour certains élèves, il pourrait s'agir d'une **compréhension formelle**. À ce moment, dans l'acquisition du langage Logo, les élèves ne possèdent pas les outils techniques permettant de traiter les fonctions comme des variables. Par ailleurs, tous les étudiants n'ont pas vu la nécessité d'en venir à cette représentation. Nous avons décidé d'adopter deux types d'attitude avec les élèves.

1) Nous incitons ceux qui sont au stade procédural à trouver une solution plus générale que nous leur présentons comme potentiellement plus économique (nous donnons deux semaines de réflexion et nous admettons le degré de difficulté de la question).

2) Pour ceux qui sont au stade de la généralisation, nous nous substituons au micro-ordinateur qui

sert habituellement à confirmer la valeur des bonnes idées et nous approuvons leur solution en l'acceptant comme conceptuellement plus adaptée au calcul fonctionnel que ne l'est le langage Logo.

C'est une autre caractéristique inhabituelle de notre séquence didactique que d'ouvrir une porte au même moment pour tous, mais de laisser le soin à l'élève de la refermer quand il y sera prêt.

Cette dernière activité peut être considérée au **palier formel** sur des **objets fonctionnels**, mais aussi au **palier intuitif** sur des objets du **domaine des opérateurs**, foncteurs, fonctionnelles etc. dont les arguments sont des fonctions.

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Compréhension intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Compréhension formelle
Fonctions		Tabulation de toute fonction: solution locale	Tabulation des valeurs d'une fonction: rôle de la variable, conséquence de ses variations	Tabulation de toute fonction: solution globale
Opérateurs de fonctions	Tabulation de toute fonction: solution globale, une fonction peut être un argument pour un opérateur			

Tableau IX. Synthèse de l'analyse du septième laboratoire

4.8 HUITIÈME LABORATOIRE: GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE, AXES ET POINTS

La description du cahier est reproduite à la figure 19.

4.8.1 Description des tâches

Ce laboratoire vise à familiariser l'élève avec le mode graphique du Logo.

Dans une première étape, l'élève explore le mode graphique de Logo, guidé par des questions. Certaines questions sont très ouvertes.

Exemple

3. Utilisez les commandes FX, FY, FXY et FCAP avec des entrées de votre choix, pour déplacer la tortue et observez ce qui se passe.

D'autres questions appellent à un regroupement et une classification des primitives graphiques.

Exemples

4. Combien y a-t-il de primitives qui agissent sur la position de la tortue? sur son orientation?
14. Les primitives données dans le glossaire sont séparées en six groupes. Dites ce que les primitives d'un même groupe ont en commun entre elles.

Enfin, d'autres suggèrent une tâche précise à remplir

Exemples

15. dessinez un L à l'écran, puis effacez-le sans utiliser VE ni NETTOIE.
17. À l'aide de la commande REPETE écrivez une instruction qui dessinera une ligne de tirets:

— — — — — — —

Dans une seconde étape, l'élève construit une procédure qui tracera un système d'axes cartésiens gradués. Ensuite, il explore l'utilisation de ce système de repérage.

4.8.2 Analyse

Exploration du mode graphique

Avec les questions ouvertes, l'élève travaille sur la signification des ordres de grandeur des nombres quand ceux-ci servent à mesurer une distance ou un angle. Il s'agit d'un travail dans le **domaine numérique** et au **palier intuitif**.

HUITIEME LABORATOIRE
GEOMETRIE CARTESIENNE
AXES ET POINTS

Contenu	La géométrie de tortue, position et orientation de la tortue, déplacements. La géométrie cartésienne, coordonnées d'un point dans le plan.
Objectifs cognitifs	Explorer les possibilités graphiques de Logo. Représenter un système d'axes, placer des points dans un repère.
Primitives Logo	AVANCE BAISSECRAYON CACHETORTUE CAP CLOTURE DROITE ECHELLE ENROULE FENETRE FCAP FECHELLE FX FY FXY GAUCHE GOMMECRAYON LEVECRAYON MONTRETORTUE NETTOIE ORIGINE POINT RECULE VERS VIDECRAN XCOR YCOR XYCOR REPETE
Durée	deux périodes

Figure 19. Description du huitième laboratoire dans le cahier

Les questions de regroupement et de classification demandent d'extraire des caractéristiques communes portant soit sur le type de sorties (résultat numérique ou modification de l'aspect de l'écran) soit sur l'objet graphique en jeu (écran, tortue, crayon). Comme il s'agit de relier les primitives, cela demande à l'élève d'invoquer une **compréhension abstraite** des outils graphiques qui sont alors traités comme des **fonctions** qu'on classifie selon leur domaine et leur image (au sens large).

Les exercices de reproduction d'objets simples demandent une **compréhension procédurale** (choix de la fonction et attribution des bonnes valeurs aux variables).

Construction du système d'axes

Il n'est pas demandé de sortir du cadre graphique fourni par Logo. L'élève peut garder l'unité du système, le pixel, et son origine au centre de l'écran. Il doit simplement choisir de graduer les axes à tous les 10 ou 20 pixels. Il s'agit tout de même de donner une **représentation** des concepts d'origine, d'axes et d'unités, ce qui demande une **compréhension abstraite.** L'utilisation du système de repérage que l'élève a construit met en jeu, comme l'exploration, l'ordre de grandeur des nombres seuls ou en couples, mais demande une quantification plus précise qui fait appel à une **compréhension procédurale**.

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Compréhension intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Comp. formelle
Arithmétique: concepts de nombre, d'origine et d'unité de mesure	Exploration du mode graphique	Utilisation du système de repérage	Construction du système d'axes	
Fonctions		Reproduction d'objets simples	Classification des primitives graphiques	

Tableau X. Synthèse de l'analyse du huitième laboratoire

**NEUVIEME LABORATOIRE
GRAPHE DES FONCTIONS ALGEBRIQUES
EN ECHELLE NATURELLE**

Contenu	Particularités graphiques des fonctions algébriques: domaine et image, intersection avec l'axe des x, asymptotes horizontales et verticales.
Objectifs cognitifs	Adapter les listes de couples (x,f(x)) à une interprétation graphique: le graphe cartésien. Explorer les différentes formes de fonctions algébriques et leur domaine. Explorer la notion d'asymptote.
Primitives Logo	FAIS
Durée	deux périodes

Figure 20. Description du neuvième laboratoire dans le cahier

4.9 NEUVIÈME LABORATOIRE: GRAPHE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES EN ÉCHELLE NATURELLE

La description du cahier est reproduite à la figure 20.

4.9.1 Description des tâches

Dans cette activité, on propose aux élèves d'utiliser des connaissances apprises lors du septième laboratoire (comment dresser une liste de couples appartenant à une fonction) et celles apprises lors du huitième laboratoire (comment piloter la tortue) pour écrire un traceur de graphe qui va donner une représentation graphique de la liste de couples. Dans un premier temps, on tracera le graphe d'une fonction précise et ensuite, on généralisera au graphe de toute fonction dont on connaît l'expression. Pour obtenir le traceur d'une fonction donnée, l'élève doit procéder en quatre étapes qui lui sont suggérées dans le cahier :

1) Sélection d'une commande graphique qui déplace la tortue à un point donné par le couple de ses coordonnées.
2) Identification dans la procédure d'affichage des couples, de la commande d'affichage qui pourra être remplacée par cette procédure graphique.
3) Simulation d'une exécution de la procédure pour que l'élève se rende compte de la nécessité de respecter des conditions initiales.
4) Écriture d'une procédure d'appel qui respectera les conditions initiales.

La seconde partie du laboratoire est consacrée à la généralisation de ce procédé à toute fonction dont on connaît l'expression. C'est en fait la fermeture de la question ouverte à la fin du septième laboratoire.

Dans le cahier, un texte explicite, à partir du passage des activités du laboratoire 3 (écriture de fonctions), comment on peut utiliser une variable pour représenter de façon potentielle tout élément d'un domaine et construire une fonction qui représentera le lien entre les valeurs de la variable et leurs images respectives. On suggère d'exploiter le même principe pour tracer toute fonction plutôt qu'une fonction donnée, et on donne le moyen technique de le réaliser. Il s'agit d'une procédure IMAGE :X :NOMFONC qui permet de calculer l'image de la valeur de x par la fonction dont le nom est la valeur de la variable NOMFONC.

La troisième partie du laboratoire consiste à utiliser le traceur de graphe pour tracer les graphes de

16 fonctions données.

4.9.2 Analyse

Écriture du premier traceur

Le travail effectué ici est centré sur des opérateurs et leurs arguments donc du **domaine fonctionnel**. L'élève doit faire des liens entre deux opérateurs. Il doit **sélectionner**, parmi les primitives graphiques qui déplacent la tortue, celle qui admet un couple comme argument. Il doit **identifier** dans la procédure d'affichage des couples, la primitive **qui prend aussi un couple comme argument** aux fins d'affichage. Il doit enfin **remplacer** la seconde par la première. Cette relation à faire en trois temps est suffisamment complexe pour justifier que l'élève doive invoquer une **compréhension abstraite** d'objets du domaine des fonctions (incarnés dans les primitives) et de leurs arguments.

Généralisation

Comme nous l'avons mentionné plus haut, cette partie de l'activité met en jeu des **variables** pour représenter les éléments d'un ensemble de fonctions qui seront soumises à des transformations. On est donc à la fois dans le domaine de **l'algèbre** et dans celui des **opérateurs**. Comme nous proposons à l'élève d'effectuer une suite de deux abstractions, des expressions arithmétiques aux fonctions et des opérations sur deux fonctions aux opérateurs sur les fonctions, comme nous lui demandons de comprendre en quoi ces deux abstractions sont semblables, il nous semble que l'élève doit alors invoquer une **compréhension formelle** du concept de variable et peut être une **compréhension intuitive** du concept de foncteur.

Utilisation du traceur

On demande à l'élève de tracer les courbes de 16 fonctions données. À chaque exemple, il doit donner le domaine et l'image, les zéros et l'ordonnée à l'origine. Les fonctions sont choisies pour poser les questions pertinentes sur les fonctions. Toutes les fonctions sont algébriques. Pour la première, on doit seulement choisir les bonnes valeurs à donner aux paramètres. Par la suite, on balaie une certaine gamme de problèmes: expliciter une fonction donnée par une équation implicite, trouver l'extremum pour obtenir l'image, trouver le ou les zéros de polynômes de degré 3, traiter en deux parties des fonctions rationnelles avec asymptote verticale, calculer un domaine pour des racines carrées d'expressions algébriques. On termine avec 3 fonctions de la forme $f(x) = (ax + b) / (cx + d)$ dont on doit identifier et représenter les asymptotes horizontales et verticales.

Cette activité fait approfondir **les fonctions** et les sous-concepts voisins. Dans la plupart des exercices, une partie ne demande qu'une **compréhension procédurale** des concepts mis en jeu. Seuls les exercices demandant de tracer les asymptotes verticales posent problème puisque le traceur ne permet de traiter que des fonctions et que l'élève doit identifier le problème et le résoudre. Ceci met en jeu une **compréhension abstraite** du concept de fonction, tout comme la formulation d'équations générales pour les asymptotes des fonctions de la forme
$f(x) = (ax + b) / (cx + d)$.

Ce même exercice permet aux élèves de manipuler des fonctions continues et d'autres qui ne le sont pas. On peut en ce sens dire que c'est une prise de contact **intuitive** avec ces concepts du domaine **fonctionnel**.

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Compréhension intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Compréhension formelle
Algèbre: concept de variable				Généralisation du traceur de graphes: variable vue comme symbole représentant potentiel de tout élément d'un domaine
Fonctions: domaine, image, ordonnée à l'origine, discontinuité et asymptotes	Tracer des graphes de fonctions continues et discontinues	Tracer des graphes de fonctions algébriques	Écriture du traceur de graphe: solution locale Tracer les asymptotes verticales: une verticale n'est pas le graphe d'une fonction	
Opérateurs de fonctions	Généralisation du traceur de graphes: une fonction peut être un argument pour une transformation			

Tableau XI. Synthèse de l'analyse du neuvième laboratoire

4.10 DIXIÈME LABORATOIRE: OPÉRATIONS SUR LES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

La description du cahier est reproduite à la figure 21.

4.10.1 Description des tâches

Cette activité consiste à calculer l'expression de la somme (la différence, le produit, le quotient et la composée) de deux fonctions dont on connaît les expressions.

Il s'agit, par rapport au laboratoire 4, d'un changement de point de vue conceptuel amené par les généralisations faites au laboratoire 9. En effet, au laboratoire 4, on fait les opérations sur deux fonctions en passant par le numérique. Par exemple, la valeur de x étant donnée, la procédure S1 calculera la valeur de $g_1(x)$, celle de $h_1(x)$ et les additionnera. On veut cette fois-ci partir des fonctions g_1 et h_1 pour obtenir leurs sommes, indépendamment de la valeur de la variable, de la même façon qu'en algèbre si on sait que $g_1(x) = \sqrt{3-x}$ et que $h_1(x)=15/(x^2-4)$, on en déduit que $(g_1+h_1)(x) = \sqrt{3-x}+ 15/(x^2 - 4)$ en additionnant les expressions de g_1 et h_1. C'est ce qui justifie le fait de travailler sur les expressions.

On procède en deux étapes. La première consiste à adopter une représentation des expressions en Logo, la seconde à réaliser des opérations sur ces représentations.

L'analyse qui mène à l'adoption du mode de représentation des expressions n'est pas laissée à l'élève, elle fait partie de la transposition didactique effectuée par l'enseignant et son résultat est intégré à la séquence didactique[1]. Le mode de représentation des expressions doit être compatible avec la représentation des fonctions sous forme de procédure ayant comme structure

```
POUR NOM-DE-LA-FONCTION  : NOM-DE-LA-VARIABLE
RETOURNE  EXPRESSION-EN-FONCTION-DE-LA-VARIABLE
END
```

comme

```
POUR F1  :X
RETOURNE  0,5* :X - 20
END
```

[1] Il en va de cette analyse comme de celle qui nous a menées à un choix de représentation des fonctions, elle constitue une transposition informatico-didactique qui est d'autant plus intéressante qu'elle n'est pas évidente a priori alors qu'elle l'est tout à fait a posteriori. Nous nous promettons de reprendre cette analyse, un jour, dans un autre document...

DIXIEME LABORATOIRE
OPÉRATIONS SUR LES EXPRESSIONS ALGEBRIQUES
(CALCUL SYMBOLIQUE)

Contenu	Calcul symbolique sur des expressions littérales. Somme, différence, produit, quotient et composée de deux expressions algébriques.
Objectifs cognitifs	Manipuler de façon entièrement formelle les opérations sur les expressions algébriques. Etablir le rôle et l'importance des parenthèses dans les manipulations de composition.
Syntaxe Logo	Les listes-instructions Les listes-expressions
Primitives Logo	DERNIER PREMIER SAUFDERNIER SAUFPREMIER
Durée	deux périodes

Figure 21. Description du dixième laboratoire dans le cahier

Nous représentons l'expression par une liste contenant le texte d'une expression ou un nombre, par exemple $\sqrt{3-x}$ sera représenté par la liste [RAC 3 - :X] ou par la liste [RAC DIFFERENCE 3 :X]. La représentation est explicitée dans le texte du cahier, mais on n'en expose pas les raisons formelles.

Pour réaliser les opérations, on expose aux élèves la façon de faire, à l'aide de l'exemple du calcul du carré. Étant donné une expression, on montre aux élèves comment calculer l'expression de son carré. Cela consiste à insérer des chaînes de caractères dans l'expression donnée. On ajoute la chaîne "P(" devant l'expression et la chaîne ")2" derrière l'expression. Cela permet à l'élève de voir comment on ajoute des chaînes de caractères et ouvre aussi sur l'ajout des parenthèses, sans toutefois insister sur le rôle qu'elles jouent.

On demande à l'élève d'utiliser le même principe pour écrire des procédures qui additionnent, soustraient, multiplient et divisent des expressions. Il n'est pas question de faire de l'analyse syntaxique et de la simplification d'expression.

Dans une troisième étape, on traite la composition d'expressions. Les élèves savent que pour obtenir l'expression de g∘h(x), on doit remplacer dans l'expression de g tous les x par l'expression de h. Pour le faire, les élèves ont besoin d'une procédure Logo qui remplace dans une liste toutes les occurrences d'un élément par un objet quelconque. Les professeurs construisent cette procédure avec les élèves. Elles utilisent un raisonnement connu sous le nom "d'acte de foi" qui est utilisé en particulier dans les preuves par récurrence, "supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang n, alors ...", et qui sert à construire les procédures récursives.

Une fois que les élèves disposent de cet outil, ils doivent déterminer quelles valeurs donner aux arguments pour obtenir la composée. Le problème des parenthèses, qui dans ce cas est un problème de sémantique, est une occasion pour les élèves de revenir encore une fois sur l'ordre de priorité des opérations.

On termine le laboratoire par une série d'exercices de calcul littéral.

> *4. Vous avez écrit des procédures qui permettent de faire des opérations entre deux expressions de fonctions représentées par leur liste. Peut-on faire des opérations entre l'expression d'une fonction et une constante à l'aide des mêmes procédures? Peut-on donner l'expression sous forme de liste et la constante sous forme de nombre?*
> *Avec les mêmes fonctions ($g(x) = \sqrt{3-x}$ et $f(x) = 0{,}5x - 20$), calculez l'expression de la fonction*
> *a) somme de f et de 2,*
> *b) différence de 3 et de g,*
> *c) produit de f par $\sqrt{2}$,*
> *d) quotient de f par 10,*
> *e) f(x - 3),*
> *f) f(x+h),*
> *g) f(x+h)-f(x),*
> *h) (f(x+h)-f(x)) / h.*

4.10.2 Analyse

Compréhension de la représentation des expressions

Même si cette partie du travail est exposée dans le cahier, l'élève doit tout de même en comprendre le sens et la nécessité. Il doit donc être capable de distinguer le travail sur des nombres du travail sur des lettres. Dans le premier, les objets manipulés sont des images de x par les fonctions, dans le second, ce sont les expressions de ces images en fonction de x. La représentation en Logo de ces objets permet de souligner encore la différence, les nombres étant traités tel quel et les expressions étant représentées sous forme de listes. Par ailleurs, l'élève qui est habitué à représenter les fonctions par des procédures fera la distinction entre l'expression, représentée par une liste et la fonction, représentée pour une procédure. On est donc dans le **domaine de l'algèbre** considéré comme un système de représentation et on y fait des relations qui relèvent de la **compréhension abstraite**. Une fois le système compris, son utilisation pour faire différentes représentations demandera d'invoquer une **compréhension procédurale** du système.

Réalisation des opérations

Cette activité demande d'identifier l'objet qu'on veut obtenir. L'élève peut partir d'une solution locale utilisant deux expressions connues pour les combiner, mais il doit en déduire une solution globale qui soit valable quelles que soient les expressions. On travaille sur la syntaxe du système de représentation dont on a parlé plus haut, **l'algèbre**. Dans un tel système, les problèmes de syntaxe liés à l'ordre de priorité des opérations et au rôle des parenthèses, relèvent du **palier de la compréhension formelle**.

La composition d'expressions

Il y a lieu de distinguer les opérations avec lesquelles les élèves sont familiers, dont ils peuvent prévoir facilement les résultats. L'addition, la soustraction, la multiplication et la division en sont des exemples. La composition est une opération nouvelle pour eux, dont les attaches sont plus fortes avec la fonctionnalité qu'avec les opérations sur les nombres donc moins bien documentée dans l'esprit des élèves. Nous identifierons donc le traitement de la composition au **domaine conceptuel de la fonctionnalité**, et les préoccupations d'ordre syntaxique qui l'entourent **au palier de la compréhension formelle**.

Nous n'analysons pas plus en détail la mise au point de l'outil Logo pour remplacer dans une liste toutes les occurrences d'un élément par un objet quelconque, à cause du fait que ce travail est fait en petits groupes, sous la direction de l'enseignante qui prend une part très active au processus. Par ailleurs, la discussion explicite des concepts de logique formelle sous-jacents débordant largement le cadre du cours, nous ne les faisons pas réutiliser par les élèves.

Exercices d'application

Il s'agit de faire une analyse syntaxique de l'expression donnée, d'identifier à chaque fois l'opérateur et les opérandes, de choisir la procédure à utiliser et de donner aux paramètres des valeurs appropriées.

Pour les quatre premiers exercices, l'opérateur est explicite, les opérandes sont simples, on travaille avec des expressions et des nombres donc on fait appel à une compréhension **abstraite** d'éléments du domaine de **l'algèbre**.

Pour les quatre suivants, la composition est un opérateur implicite. Dans trois exercices, on doit la combiner avec d'autres opérateurs et les opérandes sont parfois eux-mêmes résultats d'opérations.

Exemple : $(f(x + h) - f(x))/h$ est le quotient de la différence de la composée de l'expression de f par l'expression [:X + :H] et de l'expression de f par l'expression [:H].

Pour mener à bien cette analyse syntaxique qui met en jeu la **fonctionnalité** par le biais de la composition, il faut invoquer une **compréhension formelle** de ces concepts.

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Comp. intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Compréhension formelle
Algèbre		Utilisation du système de représentation	Compréhension de la représentation des expressions Exercices avec opérations explicites et opérandes simples	Réalisation des opérations +, -, x et + sur les expressions
Fonctions				Réalisation de la composition des expressions Exercices avec opérations implicites et opérandes calculés

Tableau XII. Synthèse de l'analyse du dixième laboratoire

4.11 ONZIÈME LABORATOIRE: OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS

La description du cahier est reproduite à la figure 22.

4.11.1 Description des tâches

Cette activité consiste à achever la démarche de généralisation des opérations sur les fonctions. Il s'agit de concevoir des opérateurs qui, partant de deux fonctions représentées par des procédures, généreraient la procédure représentant leur somme etc.

Les fonctions résultats devront avoir la même forme que toute fonction :

```
POUR  NOM-DE-LA-FONCTION   : NOM-DE-LA-VARIABLE
RETOURNE   EXPRESSION-EN-FONCTION-DE-LA-VARIABLE
END
```

Comme

```
POUR  F1 : X
RETOURNE  0.5 * : X - 20
END
```

Donc, la fonction somme devra avoir comme expression la somme des expressions des fonctions qu'on additionne.

Le processus se fera en trois étapes :

1) Extraire de chacune des fonctions son expression,

2) Additionner les expressions,

3) Reconstruire une fonction avec l'expression somme.

Les connaissances acquises au laboratoire 10 permettent à l'élève de traiter la seconde étape. Il lui reste à apprendre à décomposer une fonction (1ère étape) et à la recomposer (3ème étape).

Ainsi, il pourra travailler avec les fonctions comme étant des objets désignés par un nom et dont il lui est possible d'extraire le nom de la variable et l'expression en fonction de cette variable.

Réciproquement, la reconstruction d'une fonction se fera à partir du nom d'une variable et d'une expression en fonction de cette variable. On commence par faire travailler l'élève sur l'extraction des éléments d'une fonction. On lui présente la primitive TEXTE qui permet d'avoir accès au texte, sous forme de liste, d'une procédure dont on donne le nom. À l'aide des primitives de traitement des listes, l'élève peut avoir accès aux différents éléments du texte. Afin de lui faire explorer en détails la structure du texte d'une fonction, il a trois exercices à faire.

ONZIEME LABORATOIRE
OPERATIONS SUR LES FONCTIONS
(CALCUL FONCTIONNEL)

Contenu	Opérations sur les fonctions.
Objectifs cognitifs	Utiliser la définition formelle des opérations sur les fonctions pour représenter chacune de ces opérations comme une procédure. L'effet de chacune sera de créer, à partir des procédures représentant des fonctions, de nouvelles procédures représentant leur somme, leur différence, leur produit, leur quotient ou leur composée.
Syntaxe Logo	Procédure manipulant des procédures comme données.
Primitives Logo	DEFINIS DERNIER ELEMENT ECRIS LISTE MONTRE PHRASE PREMIER SAUFPREMIER SAUFDERNIER TEXTE
Durée	deux périodes

Figure 22. Description du onzième laboratoire dans le cahier

1. Écrire une procédure EXPRESSION *qui, à partir d'une procédure de fonction, retournera la liste-expression de cette fonction.*
2. Écrire une procédure VARIABLE *qui, à partir d'une procédure de fonction, retournera le nom de la variable sur laquelle agit cette fonction.*
3. Écrire une procédure MÊMEVARIABLE *? qui retournera le mot* VRAI *(ou* TRUE *) si les deux fonctions, dont les noms seront donnés en entrées, agissent sur la même variable et* FAUX *(ou* FALSE *) dans le cas contraire.*

Dans chaque cas, l'élève doit décrire avec précision les arguments et le résultat de la procédure.

On travaille ensuite la reconstruction des fonctions avec la primitive DEFINIS. Cette primitive est très générale et l'élève doit l'adapter au cas particulier des fonctions, c'est-à-dire des procédures de la forme.

```
POUR   NOM-DE-LA-FONCTION  : NOM-DE-LA-VARIABLE
RETOURNE   EXPRESSION-EN-FONCTION-DE-LA-VARIABLE
END
```

La primitive DEFINIS a une façon qui lui est propre d'interagir avec le système, puisqu'elle ajoute une procédure à l'environnement. L'élève a deux exercices à faire.

1. Écrire une procédure FONCTION *qui, à partir du nom de la fonction, de celui de la variable et de la liste-expression permettant de définir la fonction, générera la procédure correspondant à cette fonction.*
2. Écrire une procédure CHANGEVARIABLE *qui changera le nom de la variable d'une fonction. La variable étant un symbole muet, son nom est sans importance et on peut le changer sans changer la fonction, à condition de le changer partout où il apparaît.*

En dernier lieu, l'élève doit concevoir son opérateur d'addition des fonctions. Il s'agit d'agencer dans une même structure les procédures suivantes :

- celle qui fabrique des fonctions,
- celle qui fabrique un nom à partir de deux mots (les noms des fonctions sur lesquelles l'élève opère),
- celle qui extrait la variable d'une fonction,
- celle qui additionne les expressions,
- celle qui extrait l'expression d'une fonction.

La structure doit être telle que chacune fournissant les arguments nécessaires à l'autre ou opérant sur les résultats des autres, on obtienne le résultat voulu. La procédure est supposée ajouter à l'environnement la fonction somme des deux fonctions dont on lui a donné les noms.

Une fois que la conception de la somme est faite, l'élève reproduira le procédé pour la différence, le produit, le quotient **et la composée**. Il pourra aussi la raffiner en ajoutant des vérifications comme la nécessité pour les deux fonctions opérées de travailler sur la même variable, etc...

4.11.2 Analyse

Extraction des éléments d'une fonction

Ce travail consiste essentiellement à manipuler des variables, des expressions et leurs combinaisons que sont les fonctions. On est donc dans le domaine **fonctionnel.** L'extraction des différents éléments demande de les repérer dans la structure et de les isoler, c'est-à-dire de les séparer de ceux avec lesquels ils sont liés. Pour y arriver, l'élève doit décoder la structure, c'est un travail qui demande d'invoquer une **compréhension abstraite** des relations entre variable, expression et fonction.

Le troisième exercice de la série consiste à concevoir une opération d'un nouveau type, un prédicat. C'est une opération dont le résultat est une valeur logique. Il s'agit donc d'un opérateur défini sur les fonctions et à valeur dans l'ensemble {VRAI, FAUX}. C'est une activité sur les **opérateurs**, qui demande de déployer des habiletés **procédurales** et qui met l'élève en contact avec un opérateur. Cette prise de contact est au palier **intuitif**. La description des trois procédures écrites demande une **compréhension abstraite**.

Reconstruction des fonctions

On peut faire une analogie entre l'extraction des éléments d'une fonction et le décodage d'une expression préfixée, et entre la reconstruction des fonctions et le codage sous forme préfixée. Si le décodage ne demande que de lire en tenant compte des conventions d'écriture, le codage demande d'identifier les opérateurs et les opérandes et de les représenter dans une structure spatiale, ce qui demande une compréhension abstraite. Il en va de la même façon pour la reconstruction des fonctions. L'élève doit partir des éléments constituants (analogues aux opérandes), que sont le nom de la fonction, celui de la variable et l'expression. Il doit les modifier pour leur donner une forme acceptable par la primitive DEFINIS.

Le nom de la variable doit en effet être mis dans une liste et l'expression doit être précédée du mot RETOURNE afin de s'assurer que la procédure créée soit bien une fonction. Enfin, il combine ces résultats à l'aide de la primitive DEFINIS. Tout ceci demande une **compréhension abstraite** des relations entre variable, expression et fonction qui sont des concepts du domaine **fonctionnel**.

Conception de l'opérateur d'addition

L'élève dispose de nombreuses fonctions sous forme de procédures, dont :
- une procédure qui crée une fonction à partir d'un nom de fonction, d'un nom de variable et d'une expression,
- une procédure qui extrait la variable d'une fonction dont on lui donne le nom,
- une procédure qui additionne deux expressions,
- une procédure qui extrait l'expression d'une fonction dont on lui donne le nom.

L'élève doit trouver selon quel plan agencer toutes ces fonctions pour créer l'opérateur qui additionne des fonctions. C'est essentiellement un travail de composition, au sens fonctionnel du terme, de quatre ou cinq fonctions, selon la solution. C'est pourquoi il doit identifier clairement le domaine et l'image de l'opérateur en construction, ainsi que des fonctions composantes. Toutefois, à aucun moment de ce travail, l'élève ne formule son travail en termes de composition de fonctions et de compatibilité de l'image de l'une avec le domaine de la suivante. Dans ce travail, comme dans d'autres laboratoires, on doit distinguer le travail explicite du travail implicite.

Le travail explicite porte sur les **opérateurs de fonctions** et il se fait au **palier abstrait**, à cause de la complexité de la structure en jeu. Le travail implicite porte sur la **fonctionnalité** et se fait au **palier intuitif**, car il n'est jamais nommé.

Conception des autres opérateurs

L'élève utilise exactement le même principe. Il dispose maintenant d'un exemple dans lequel il doit identifier ce qui est particulier à la somme et qu'il devra modifier pour l'adapter aux autres opérations, de ce qui est général et qui forme la structure d'un opérateur de fonctions. Le travail porte donc sur les **opérateurs de fonctions** et consiste à identifier ce qui les distingue entre eux et ce qu'ils ont de commun, c'est un travail au palier **abstrait**. La mise en oeuvre de cette analyse se traduit par le choix des fonctions à changer qui ne demande qu'une **compréhension procédurale**.

Essai des opérateurs

Au cours de la mise au point des opérateurs, l'élève procède à des essais. Cela consiste à choisir deux fonctions déjà existantes et à tenter de les additionner, soustraire, etc. À chaque fois, le bon résultat serait un ajout à l'environnement d'une nouvelle fonction ayant même variable que les deux fonctions sur lesquelles l'élève opère et dont l'expression est la somme de leurs expressions, la différence etc.

Un résultat partiel serait soit que la somme ne soit pas créée, soit un ajout à l'environnement d'un objet qui n'est pas une fonction ou d'une fonction qui ne correspond pas tout à fait à la somme. Nous n'avons pas exploré la gamme des résultats partiels possibles. Toutefois, l'élève, au cours de ses essais, juge s'il a ou non obtenu le bon résultat. Ce faisant, il utilise en permanence l'idée que la somme de deux fonctions est une fonction et que cela vaut pour la différence, le produit, le quotient et la composée. Cette idée simple, et dont on se sert de façon implicite abondamment dans le cours de calcul, n'est pas courante chez les élèves pour qui la somme de deux fonctions est plutôt un nombre. Il nous semble que ce travail développe une compréhension **intuitive** du **domaine des opérateurs de fonctions**.

Palier d'abstraction Domaine dans la trame conceptuelle	Compréhension intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Comp. formelle
Fonctions: concepts de variable et d'expression en fonction de la variable			Extraction des éléments constituant une fonction : les repérer dans la structure et les isoler Construction de fonction à partir d'une variable et d'une expression	
Concepts de domaine, d'image et de fonctionnalité	Vérification des images et des domaines pour construire l'opérateur d'addition		Description des arguments et des résultats des extracteurs de variable et d'expression et du constructeur de fonction	
Opérateurs de fonctions	Utilisation comme critère de jugement du domaine des opérateurs	Écriture du prédicat qui vérifie si deux fonctions ont la même variable Substitution des sous-fonctions pour passer de la somme aux autres opérateurs	Conception de l'opérateur d'addition Conception des opérateurs: différentiation pour passer de la somme aux autres opérateurs	

Tableau XIII. Synthèse de l'analyse du onzième laboratoire

4.12 IMAGE GLOBALE ET DYNAMIQUE DE L'ENCHAÎNEMENT DES ACTIVITÉS DE LABORATOIRE

Pour avoir une image de l'ensemble des activités de laboratoire, nous les avons réunies dans le tableau XIV. Elles sont représentées par le numéro du laboratoire dans lequel elles figurent et elles sont situées dans la grille selon le palier d'abstraction que l'enseignant souhaite voir invoquer et le domaine dans la trame conceptuelle des objets mis en jeu.

Palier d'abstraction / Domaine dans la trame conceptuelle	Compréhension intuitive	Compréhension procédurale	Compréhension abstraite	Compréhension formelle
Arithmétique	5-5-8	2-2-8	2-2-8	
Algèbre	5	3-3-3-5-5-10	5-5-10-10	9-10
Fonctions	1-1-1-3-5-9-11	4-4-6-7-8-9	4-4-6-6-6-6-6-7-8-9-9-11-11-11	6-6-7-10-10
Opérateurs de fonctions	7-9-11	11-11	11-11	

Tableau XIV. Image globale des activités de laboratoire

Ce tableau ne rend pas compte de l'importance relative des activités et on ne peut en tirer que des informations grossières. Toutefois, deux caractéristiques ressortent: beaucoup d'activités (32 sur 61) portent sur des objets du domaine des fonctions, la compréhension la plus souvent souhaitée est la compréhension abstraite (23 activités sur 61) alors que la compréhension la moins souvent appelée est la compréhension formelle (7 activités sur 61).

Pour faire ressortir la dynamique de l'enchaînement des laboratoires, nous les avons placés approximativement sur la grille et nous avons tracé le cheminement chronologique sur la figure 23. Cette image est partielle car chaque laboratoire est plus un halo autour du point qui le représente que le point lui-même. Toutefois cette image illustre que l'enseignement ne se fait pas de manière linéaire ni séquentielle, mais effectue de nombreux retours sur les domaines de connaissances et les paliers d'abstraction antérieurs.

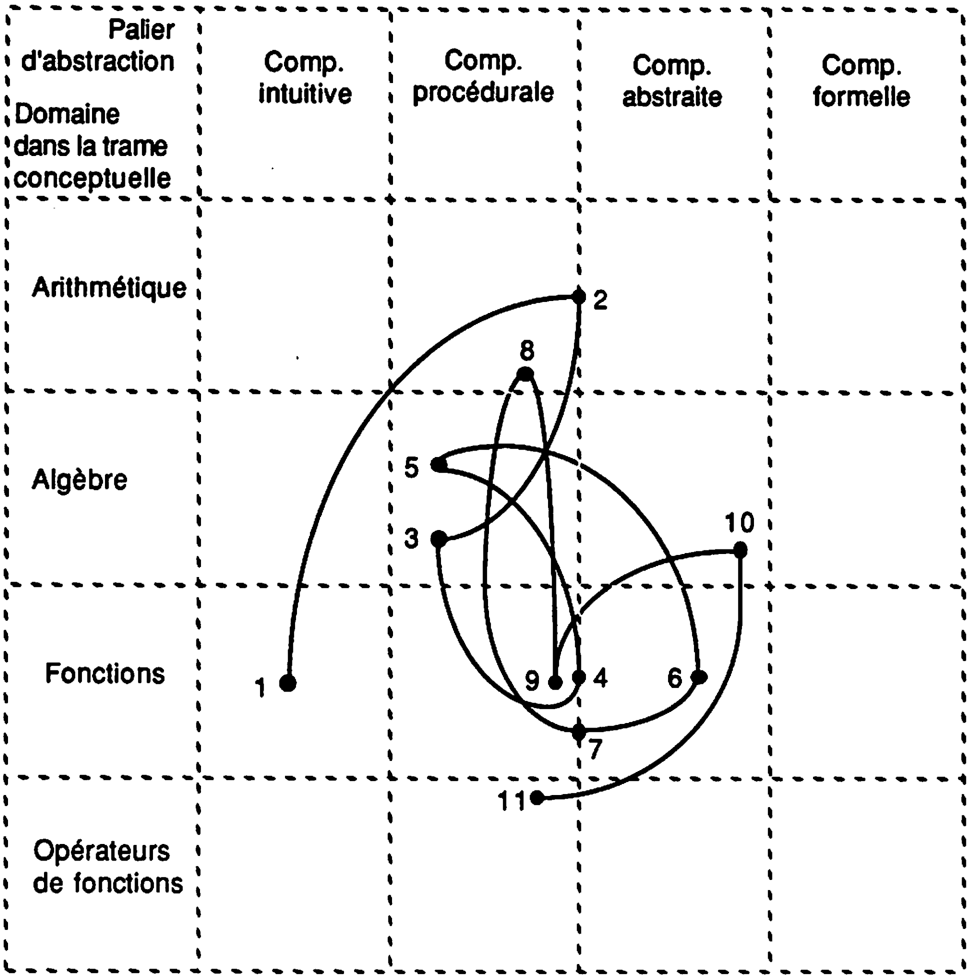


Figure 23. Dynamique de l'enchaînement des laboratoires

5

Le Portrait des Élèves

> *Un maître qui ne se souvient pas de ce qui a été fait par tel ou tel élève, ou de ce qui a été donné comme savoir commun, ou un maître qui laisse entièrement à la charge de l'élève l'intégration des moments d'enseignement est un maître sans mémoire. Il est incapable d'exercer des pressions didactiques personnalisées et spécifiques qui paraissent indispensables dans le contrat didactique.*
> *Brousseau, Les différents rôles du maître, p. 23*

Après l'étude historique et l'explicitation des intentions de la séquence didactique, le troisième volet de notre étude porte sur l'examen des acquisitions des élèves. Cet examen ne peut faire abstraction de leurs connaissances antérieures. C'est ce que nous présentons dans ce chapitre avant de choisir les élèves dont nous suivrons la démarche de plus près.

Le cours 201-302-85 s'adresse aux élèves du programme professionnel de techniques administratives. Le Collège de Sherbrooke organise l'enseignement selon une grille fermée et des groupes homogènes d'élèves. Pour ces élèves, le cours 201-302-85 est offert en première session et le calcul 201-103-77 est offert en deuxième session. À l'automne 90, environ 210 élèves étaient inscrits en première année de techniques administratives et ils étaient répartis en sept groupes d'environ 30 élèves. Tous les groupes recevaient le cours 201-302-85 selon la même méthodologie. Les échanges entre les quatre professeurs du comité de cours furent fréquents et fructueux tout au long de la session. Notre expérience a porté sur trois de ces groupes. Dans ce qui suit nous portons notre attention vers les antécédents scolaires des élèves.

5.1 LE CHEMINEMENT SCOLAIRE ANTÉRIEUR

Considérant la transformation inévitable de tout élément de savoir devant être enseigné, processus décrit par Chevallard (1985) sous le nom de transposition didactique, il nous semble essentiel d'essayer de cerner comment les concepts de variable et de fonction sont actuellement enseignés au Québec afin de les mettre en perspective avec leur construction historique. Les documents du

Ministère de l'Éducation du Québec qui présentent le programme d'études, les guides pédagogiques qui les accompagnent ainsi que les textes des volumes utilisés par les élèves de la commission scolaire de l'Estrie nous semblent des sources à privilégier, des outils précieux et révélateurs du traitement des objets d'enseignement de ces concepts.

Ce regard sur les contenus officiels vise à identifier les caractéristiques du cheminement scolaire antérieur de nos élèves, même si nous ne pouvons pas connaître de façon précise l'expérience de ces élèves et si nous ne voulons pas soulever les accidents de parcours éventuels liés à des problèmes d'organisation ou à des problèmes personnels. Notre objectif est bien de repérer dans la mesure du possible les intentions de l'enseignement qui a contribué à la construction des connaissances de nos élèves.

Toutefois, nous apportons tout de suite un bémol à la réutilisation éventuelle de cette analyse sommaire car les programmes seront remaniés dans un avenir rapproché et nous ne pouvons pas présumer des effets provoqués par ces modifications.

5.1.1 L'ambiguïté du choix offert au second cycle du secondaire

Le concept de variable prend ses assises en algèbre qui est elle-même une généralisation de l'arithmétique. Il n'est pas de notre intention de reprendre entièrement le cursus mathématique de nos élèves. Pourtant, il nous semble important de profiter de l'occasion pour ouvrir une parenthèse et souligner l'ambiguïté des choix offerts aux élèves du secondaire: la voie régulière ou celle à option. En effet, nous pouvons lire dans le cahier du programme d'études secondaire, (Mathématique, Option 1, 1982.) que cette voie à option s'adresse aux élèves intéressés

> *"Cependant, en raison du contenu de cette option et du niveau de connaissances visé par celle-ci, ce programme d'études s'adresse d'une façon particulière aux élèves dont les goûts, les intérêts, les aptitudes ou les besoins sont axés sur les sciences ou les techniques." p.7*

De telles caractéristiques visent directement tous ceux qui désirent poursuivre leurs études dans la plupart des profils généraux ou professionnels de niveau collégial même si nous avions pu lire un peu plus tôt que la réussite du programme de base était la seule exigence pour être admis au collégial.

> *"Le programme de base, obligatoire pour tous au second cycle du secondaire est, en mathématique, le seul préalable au niveau collégial. Le programme à option ne peut en aucun cas être considéré comme préalable à quelque concentration que ce soit au niveau collégial. En effet, l'élève aura toujours la possibilité de choisir cette option, à ce niveau, s'il n'a pas obtenu, au niveau secondaire, les crédits qui lui sont rattachés. " p.6*

Cette dernière remarque ouvre la porte à de faux-fuyants. Elle offre une certaine liberté à l'élève qui n'est pas nécessairement en mesure de faire le meilleur choix à cette étape de la vie. De plus, elle est la manifestation de bonnes intentions mais ses effets sont pernicieux. Retrouve-t-on au niveau collégial de réelles possibilités de reprendre le contenu de cette option? Sommes-nous en présence de deux mondes où les acteurs développent des attitudes schizophréniques? Des élèves ayant l'illusion d'avoir accès aux différents programmes du collégial en suivant le programme de base au secondaire et des professeurs du collégial ayant l'illusion qu'un diplôme d'études secondaires garantit l'acquisition des connaissances préalables à leur cours. Un tel isolement ne peut qu'aviver les problèmes d'arrimage. Le but de notre recherche n'est pas de discuter de ce problème mais nous ne pouvons pas laisser sous silence cette question qui ravive le douloureux souvenir de ces nombreux élèves, convaincus de pouvoir reprendre à peu de frais, les préalables de mathématiques nécessaires au niveau collégial. Le temps est venu de clarifier la situation et c'est peut-être l'objectif visé par l'éventuel programme du secondaire.

5.1.2 Un choix privilégié, la voie à option

On était habitué, avant la récente modification du programme de techniques administratives à ce que l'élève qui entreprend un cours de pré-calcul ait réussi les cours de la voie d'option (434 et 534) ou son équivalent. Quelques exceptions se glissaient à cause du fait que l'admission du mois de mars se fait sur la base du secondaire IV et des premières étapes du secondaire V. Cette année, sur les 94 élèves inscrits en septembre dans les trois groupes auxquels nous devions enseigner, 67 avaient réussi les cours 434 et 534 ou leur équivalent. En fait, la préparation des élèves au secondaire est très inégale. Certains ont suivi quatre et même cinq cours différents de mathématiques durant leurs deux dernières années du secondaire, d'autres suivent la filière prévue 414-434-534. On rencontre même l'élève qui a suivi trois années de suite le 414 et n'a de ce fait pas eu le temps de suivre le 434 ni aucun cours de niveau V. Tout se complique quand on considère les élèves avec un cheminement particulier, soit qu'ils aient suivi des cours à l'éducation des adultes, soit qu'ils aient suivi leurs cours sous l'ancien régime pédagogique du secondaire. Ils étaient seize dans ce cas parmi nos 94 élèves. En fait, même si on ne tient compte ni des cheminements particuliers ni du cinquième cours ajouté par certaines écoles, nous avons identifié onze cheminements différents dans les deux dernières années du secondaire (annexe nº3).

On peut penser que la proportion de 67 élèves sur 94 ayant réussi 434 et 534 n'augmentera pas au cours des prochaines années. À ce titre le Collège de Sherbrooke n'est pas parmi les collèges qui ouvrent leurs portes les plus grandes, en effet il n'offre de cours d'appoint (201-311) qu'à un groupe de 30 élèves par année et encore ce groupe n'est-il ouvert qu'aux élèves en changement de programme. Il est fort probable que d'autres collèges ont déjà une proportion inférieure.

Malgré toutes les réserves énoncées ci-haut, étant donné que la majorité des élèves de notre échantillon a suivi jusqu'à la fin la voie à option, celle-ci demeurera l'objet principal de notre analyse.

5.1.3 Le curriculum traduit en terme d'objectifs

Dans le cahier du programme d'études secondaires (Mathématique second cycle, mars 1982), nous pouvons retrouver la volonté de rajeunir l'enseignement de la mathématique.

> *"L'enseignement de la mathématique au niveau secondaire devrait sortir de ses schèmes traditionnels (théorie-exercices-application) et s'adapter à la clientèle." p.11*

Ce souci de s'adapter à la clientèle se spécifie lors de la description de l'objectif global.

> *"Le programme vise à développer chez l'élève le mode de pensée qui caractérise la mathématique et à en favoriser l'application dans les diverses situations du vécu quotidien de l'élève dans un monde en continuelle évolution." p.19*

Cet objectif global est traduit en objectifs généraux, terminaux et intermédiaires qui sont articulés dans les contenus et dans les guides pédagogiques. Il peut s'énoncer à l'aide de trois objectifs généraux tout au long du second cycle. Nous reproduisons ci-dessous le tableau de la page 39 décrivant le temps alloué à chacun des objectifs selon chaque niveau.

Selon la répartition proposée, il reste 25% du temps utilisable pour des activités d'évaluation, de récupération ou d'enrichissement.

Nous pouvons remarquer que les concepts de variable et de fonction sont présentés pour répondre, en partie, au premier objectif. Les éléments de connaissance sont mis en place en troisième secondaire pour être particulièrement étudiés en quatrième secondaire. La compréhension de ces concepts étant identifiée comme essentielle au niveau collégial ne se révèle pas le point central des contenus mathématiques du secondaire. Bien entendu, ces deux niveaux d'enseignement possèdent des missions fort différentes et nous devons en tenir compte au moment d'accueillir les élèves dans un cours de pré-calcul. L'enseignement du secondaire doit faire un survol de plusieurs thèmes et le temps n'est pas encore venu de parler de spécialisation.

Objectifs généraux	sec III	sec IV	sec V
1) Favoriser chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques	30%	45%	20%
2) Favoriser chez l'élève l'analyse de situations géométriques	30%	30%	20%
3) Initier l'élève à l'analyse de données statistiques ou probabilistes	15%	0%	35%
	75% ou 36 sem.	75% ou 36 sem.	75% ou 36 sem.

Tableau XV. Temps alloué aux objectifs par niveau

5.1.4 Les concepts de variable et de fonction

Regardons de plus près la prise de contact de nos élèves pour les deux concepts qui nous intéressent.

5.1.4.1 Le concept de variable à travers l'outil algébrique

Les élèves ont résolu des problèmes de la vie courante en traduisant ces problèmes à l'aide d'une expression algébrique du premier degré à une variable réelle. Ce genre de travail a été fait dès le premier cycle du secondaire. C'est la première utilisation du symbole représentant l'inconnue du problème où l'algèbre devient l'outil de solution.

De nombreux auteurs se sont attardés à étudier les différents obstacles rencontrés à ce niveau, soit au sujet de la variable soit au sujet des manipulations algébriques (Küchemann 1981, Booth 1984, Olivier 1988, Herscovics 1989, Kieran 1989, Tall 1989 pour n'en nommer que quelques uns). Nous pouvons relever, entre autres, le difficile passage de l'arithmétique à l'algèbre. La tâche à accomplir passe du calcul d'un résultat numérique à l'analyse des opérations utilisées pour y arriver. L'élève doit modifier son interprétation de la notation; par exemple, la juxtaposition de deux symboles qui représente un nombre en arithmétique, signifie une multiplication en algèbre. De plus, il doit clarifier le rôle de l'alphabet, la lettre ne représente plus l'objet mais bien le nombre d'objets, ce qui laisse ouverts plusieurs niveaux d'interprétation, allant de la substitution d'une constante jusqu'à l'idée de variable. En dernier lieu, il doit utiliser adéquatement les manipulations algébriques pour obtenir des expressions équivalentes.

Si ces obstacles ne sont pas vaincus dès la première tentative, sont-ils encore présents au niveau collégial? La question demeure ouverte.

5.1.4.2 La définition de fonction

Nous pouvons observer qu'au début du second cycle, l'élève apprend à identifier la variable à partir d'une situation concrète et à résoudre une équation du premier degré. Il s'initie peu à peu à l'application de certains concepts ensemblistes, développe une meilleure connaissance des réels et une meilleure interprétation du réel à partir de relations binaires. La définition d'une relation est présentée très tôt et servira tout au long du second cycle.

Une relation R de A vers B est un sous-ensemble de produit cartésien AxB
- A est l'ensemble de départ de la relation
- B est l'ensemble d'arrivée de la relation
- R est un ensemble de couples définis par une règle de correspondance.

Les relations tirées de contextes familiers (par exemple, "est l'oncle de") et définies sur des ensembles finis sont représentées par un graphe sagittal ou un graphe cartésien. Le domaine et l'image de la relation sont définis à partir des couples choisis dans le produit cartésien. Le domaine est l'ensemble des premières composantes des couples et l'image est celui des deuxièmes. Ces exemples de relation permettent de définir la relation réciproque notée R^{-1}.

Si R est une relation de A vers B alors R^{-1} est une relation de B vers A telle que
$(y,x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in R$

Ainsi, le domaine de la relation devient l'image de la relation réciproque et l'image de R devient le domaine de R^{-1}. La représentation sur le même graphe cartésien de R et de R^{-1} permet d'observer que la bissectrice de l'angle formé par les deux axes joue le rôle d'axe de réflexion. Cette observation géométrique sera réutilisée plus tard au moment de présenter la fonction logarithmique.

Les lieux géométriques sont un important sujet d'étude tout le long du secondaire. Ils donnent l'occasion de familiariser l'élève avec la représentation de droites ou de paraboles vues comme relations du premier ou du deuxième degré.

L'étude des propriétés d'une relation précède celle des lieux géométriques. L'élève peut même apprendre à composer deux relations.

Soit R une relation de A vers B et S une relation de B vers C, la composée $S \circ R$ est une relation de A vers C dont l'ensemble des couples $(x,z) \in A \times C$ et pour lesquels $\exists\ y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S$

Les exemples de composition de relations viennent de contextes semblables à ceux mentionnés précédemment et sont représentés par un graphe sagittal.

Tout semble en place pour présenter une définition ensembliste de fonction et pour favoriser l'utilisation de certaines fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme outil de mathématisation. Ainsi, l'étude du concept de fonction est attaquée plus précisément en donnant la définition suivante:

Une fonction f est une relation qui fait correspondre à chaque x utilisé dans A (l'ensemble de départ) au plus un élément de B (l'ensemble d'arrivée).

Notation: $f: \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ x & \rightarrow & f(x) \end{array}$

La fonction est une relation ayant la caractéristique supplémentaire de l'unicité de l'image. Aussi, l'élève doit apprendre à distinguer une fonction d'une relation. Les ensembles de départ et d'arrivée peuvent être des ensembles finis ou infinis. Dans certains cas, l'élève travaille avec la représentation sagittale et reconnaît une fonction s'il ne part pas plus d'une seule flèche de chaque élément de l'ensemble de départ vers les éléments de l'ensemble d'arrivée. Pour les ensembles infinis, l'élève travaille avec le graphe cartésien et utilise le test de la verticale.

Nous ne rencontrons pratiquement aucune analyse de phénomènes faisant intervenir un lien de dépendance entre deux quantités variables. Ce type d'analyse viendra plus tard. Comment l'élève peut-il saisir toute la richesse du concept de fonction? Pouvons-nous espérer que les éléments de connaissance sont mis en place et qu'ils seront récupérés plus tard?

5.1.4.3 Les sous-concepts de fonction: domaine, image

Dans ce contexte relationnel et ensembliste, le domaine et l'image sont définis de la façon suivante:

Le domaine est le sous-ensemble de l'ensemble de départ qui contient la première composante des couples de la fonction f.

L'image est le sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée qui contient la deuxième composante des couples de la fonction f.

Les exercices se limitent à faire déterminer le domaine ou l'image de la fonction considérée. L'élève développe des habiletés techniques pour travailler avec le graphe sagittal ou le graphe cartésien, avec des descriptions de la fonction en extension ou en compréhension. Dans les exemples, on utilise des expressions algébriques du premier ou du deuxième degré. En exercice, il est souvent demandé de déterminer l'image par la fonction d'une certaine valeur de x ou inversement, à partir d'une image, de retrouver l'élément du domaine correspondant. L'élève doit donc différencier l'image de la fonction et l'image d'une valeur de x par la fonction. La double utilisation du mot image ne lui facilite pas la tâche.

5.1.4.4 La fonction réciproque préparant le passage de la fonction exponentielle à la fonction logarithmique

C'est alors que la fonction réciproque est définie en s'inspirant de la relation réciproque et en présentant sa signification sur le graphe sagittal. À partir du graphe cartésien, la symétrie par rapport à la bissectrice des premier et troisième quadrants est à nouveau observée. La droite y=x est bien l'axe de symétrie de la figure formée par la fonction et sa réciproque. L'élève la considère comme un axe de réflexion. Bien entendu, il constate que la réciproque d'une fonction n'est pas nécessairement une fonction. Pour retrouver la règle de correspondance de la réciproque, l'algorithme algébrique est proposé. Les x et le y de l'expression algébrique de la fonction sont interchangés et le nouvel y est isolé. Aucune discussion n'est ouverte sur la signification de ce "fameux" nouvel y. Les exemples sont souvent des fonctions du premier degré et la règle de prudence est énoncée, on suggère alors à l'élève de vérifier si la fonction est injective, surjective et enfin bijective. Pour tracer rapidement le graphe de la fonction réciproque, l'élève peut utiliser l'algorithme géométrique.

La fonction réciproque prépare la présentation de la fonction logarithmique qui se fera sous peu à la suite de l'étude de la fonction exponentielle. Il est remarquable que l'étude de la fonction exponentielle sera l'occasion d'étudier les propriétés des exposants.

> *"...puisque les élèves qui arrivent en 4^{e} secondaire, ayant suivi le nouveau programme, n'ont presque rien vu concernant les exposants" (Guide pédagogique Mathématique secondaire Option 1, 1985 p.149)*

Ainsi, les élèves doivent prendre du temps pour bien assimiler les propriétés des exposants et pour s'en servir efficacement même s'ils ont eu une brève initiation en deuxième secondaire. Par la suite, les fonctions exponentielles sont présentées à partir de situations concrètes en faisant appel à la mise en équation pour des cas simples.

> *Une fonction définie par $f(x) = a^x$ est une fonction exponentielle de base a. Pour une telle*

fonction, $a \in \mathbb{R}^*_+$ et $a \neq 1$.

L'élève reprend le graphe cartésien à partir de table de nombres. Il s'attarde au domaine et à l'image de cette fonction. Il étudie la croissance ou la décroissance pour chacune et il passe un certain temps à résoudre des équations exponentielles. Différentes fonctions exponentielles sont présentées à l'aide de translations verticales et horizontales ou encore par réflexion. C'est ainsi que la réciproque de la fonction exponentielle est présentée.

L'image d'une fonction exponentielle f par une réflexion dont l'axe est la droite d'équation $y = x$ est appelée la réciproque de f. Cette réciproque est notée f^{-1} et est aussi appelée la fonction logarithmique.

L'algorithme algébrique utilisé pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction du premier degré est repris pour déterminer la fonction logarithmique introduisant la notation logarithmique. Les différentes caractéristiques de ces deux fonctions sont étudiées: le domaine, l'image, le zéro, la croissance ou la décroissance. Le programme offre même la possibilité pour les élèves qui entreprendront des études de niveau collégial, de voir la présentation du nombre irrationnel e et de la fonction ln x comme enrichissement. L'élève résout quelques problèmes concrets mais il passe un certain temps à résoudre des équations exponentielles et logarithmiques sans contextes.

Les fonctions exponentielles et logarithmiques exigent une attention particulière. Ces fonctions sont présentées à la fin de la quatrième secondaire et souvent le temps manque. Selon les écoles, des solutions sont envisagées, cours du soir, contenu reporté en cinquième secondaire ou encore survol rapide de la matière. Du même coup, l'assimilation des propriétés des exposants vient d'en prendre un dur coup. Il ne faut pas se surprendre de la disparité des compétences des élèves rencontrés au collégial pour manipuler les exposants, d'autant plus que ces derniers ne subissent pas d'évaluation venant du ministère en quatrième secondaire.

5.1.4.5 Les fonctions polynomiales

En cinquième secondaire, la définition de la fonction est reprise à partir de la relation à titre de rappel et elle se lit de la façon suivante:

Une fonction est un ensemble de couples où la première composante ne se répète pas.

L'élève aborde l'étude de la fonction sous le grand thème des fonctions polynomiales (de degré 0, 1, 2 et 3 facultativement). Ainsi, la fonction polynomiale de degré 0 est la fonction constante. La fonction polynomiale de degré 1 est alors présentée avec un raffinement de la classification en définissant la fonction identité, la fonction linéaire et la fonction affine. Enfin, la fonction polynomiale de degré 2 est la fonction quadratique dont le graphe est la parabole ayant un axe de symétrie vertical. Le graphe est comparé aux deux types d'équations canoniques des paraboles et on utilise le test de la verticale pour s'assurer qu'on a bien une fonction.

En pratique, l'élève retrouve des représentations graphiques vues en quatrième secondaire sous une nouvelle nomenclature. Certaines caractéristiques des fonctions sont reprises, par exemple le domaine, l'image, les minimums ou les maximums, les intervalles de croissance ou de décroissance, tandis que de nouvelles propriétés sont présentées, comme l'additivité ou l'homogénéité, l'existence et la valeur des zéros et de la réciproque. C'est au moment de déterminer les zéros que l'élève reprend les habiletés du calcul algébrique; isoler l'inconnue pour déterminer le zéro de la fonction du premier degré ou encore décomposer en facteurs l'expression du deuxième degré. L'occasion est offerte à l'élève de réutiliser ses connaissances sur les fonctions polynomiales pour résoudre des problèmes issus de situations concrètes.

Par la suite, d'autres fonctions sont à l'étude: valeur absolue, partie entière, fonction rationnelle, variation inverse, racine carrée. Pour chacune, les caractéristiques sont reprises. De plus, les opérations algébriques sur les fonctions sont abordées ainsi que la composition. Cette dernière opération est comparée à la composition de transformations déjà rencontrées en géométrie puis à la composition de relations. En dernier lieu, l'élève étudie en détail les fonctions trigonométriques avec plusieurs problèmes d'application.

5.1.5 L'identification d'obstacles et leurs conséquences

Cette description rapide n'est que le reflet du survol imposé à l'élève. Ainsi, la compréhension des deux concepts de variable et de fonction se construit de façon irrégulière au cours de ces trois ans. Nous observons que l'algèbre, qui demeure l'outil privilégié d'expression de ces deux concepts, est un objet d'étude parmi plusieurs autres. Son apprentissage nécessitant régularité et persistance se voit sérieusement ébranlé. Pouvons-nous en retracer les séquelles au niveau collégial? Nous conservons cette préoccupation. Au secondaire, on utilise le concept de variable en tant qu'inconnue et parfois en tant qu'ensemble de valeurs numériques. Un premier palier de compréhension est atteint et il ne peut, ni ne doit être sauté.

Dans un deuxième temps, l'étude des phénomènes de changement permet d'utiliser l'outil algébrique pour déboucher sur la dépendance fonctionnelle entre deux variables. Selon Janvier, Charbonneau et René de Cotret (1989), il est nécessaire d'analyser le processus de modélisation en sciences pour élaborer les concepts de variable et de fonction. Pourtant, nous notons que rares sont les occasions offertes aux élèves (presqu'exclusivement à la toute fin du secondaire) d'étudier les phénomènes de changement qui permettraient de faire le passage de l'aspect statique à l'aspect dynamique du concept de variable. Ce dernier aspect a même poussé René de Cotret (1985) à réunir les deux concepts sous le vocable variable-fonction car la modification de la conception de variable vient de la modification de la conception de fonction et vice versa.

Comment garder l'intérêt de l'étude du concept de fonction si nous attendons aussi longtemps avant de considérer les situations qui l'ont vu naître? Tout en évitant le piège de la multiplicité des exemples à outrance, nous pourrions étudier certains cas de dépendance fonctionnelle relativement tôt. Cette variété d'exemples pourrait resituer la définition du concept de fonction et pour l'instant nous questionnons la pertinence de donner dans un premier temps la définition ensembliste de fonction. Nous reprenons les conclusions de Sfard (1989) qui précise qu'il est inefficace de présenter une nouvelle notion mathématique à l'aide de sa définition formelle. La notion devient un objet abstrait inaccessible s'il n'est pas supporté par un certain nombre de manipulations et d'expériences. L'étude historique renforce ce questionnement car le concept de fonction fut utilisé durant plusieurs siècles avant que n'apparaisse la définition ensembliste actuellement enseignée. Cette définition a servi à étudier des objets fort éloignés du calcul différentiel et encore plus de l'algèbre élémentaire. Quel effet produit un enseignement amorcé par cette définition de fonction? Cette définition vient-elle brouiller les cartes inutilement? Est-elle réutilisée spontanément par les étudiants qui entreprennent un cours de pré-calcul au niveau collégial? Toutes ces questions demeurent sans réponses pour l'instant.

Nous venons d'énumérer quelques difficultés potentiellement rencontrées par les élèves du secondaire. Nous pourrions en donner une première classification car nous retrouvons dans la littérature une analyse des difficultés rencontrées dans l'apprentissage débouchant sur l'identification d'obstacles d'origine épistémologique, ontogénétique ou didactique. Toutefois, nous préférons confronter cette première classification à l'analyse des comportements des élèves de notre échantillon. Une étude plus approfondie des productions des élèves que nous côtoyons, demeure essentielle. Enfin, nos préoccupations se tournent davantage vers l'identification des obstacles majeurs conduisant au développement de stratégies didactiques facilitant le franchissement de ces obstacles.

5.2 LES RÉSULTATS D'UN QUESTIONNAIRE: REFLET DES ACQUIS

Comme nous venons de l'observer, les 94 élèves inscrits au départ avaient des cheminements préalables très diversifiés. On retrouve un schéma des divers cheminements à l'annexe nº3. Notons simplement que le programme de techniques administratives a comme préalable le cours 434 ou l'équivalent et que 89 élèves avaient ce préalable. Le cours 201-302 n'a pas de préalable à part un diplôme d'études secondaires mais le cours de calcul a comme préalable le cours 534 ou l'équivalent et 21 des 94 élèves ne détenaient pas ce préalable.

Avant d'analyser les productions des élèves, nous voulons faire le point sur l'état de leurs connaissances à propos des concepts de variable et de fonction à leur arrivée au cours de pré-calcul. Cela nous semble d'autant plus important que selon Brousseau (1989), des connaissances, même fausses, peuvent servir d'appui à l'établissement du savoir définitif.

Nous avons demandé aux élèves de répondre à onze items dès la première rencontre. Nous avons repris des exercices donnés à nos élèves les sessions précédentes, certaines questions de Sfard (1989) et d'autres qui avaient déjà servi à évaluer la performance de 70000 élèves américains âgés de 9, 13 et 17 ans confrontés à des situations faisant intervenir les concepts de variable et de relation. Une analyse des résultats américains a été reprise par Herscovics (1982) dans un article portant sur les problèmes reliés à la compréhension des fonctions. Les sujets traités recoupaient les préoccupations des professeurs de notre milieu, énoncées à de nombreuses occasions lors de discussions informelles.

Nous utilisons surtout des fonctions définies à l'aide d'une expression algébrique. Est-ce justifié? Le passage de l'arithmétique à l'algèbre est-il réussi par les élèves au moment d'aborder le collégial? Quels sont les principes essentiels devant être connus par les élèves qui entreprennent un cours de pré-calcul?

Le mouvement des mathématiques modernes a encouragé l'enseignement du concept de variable sous sa forme la plus générale qui soit, et ce, dès le départ. Les paramètres, les inconnues, et les variables sans contraintes se retrouvent tous sous le concept abstrait de variable. Quel niveau d'interprétation du mot variable les élèves utilisent-ils? De plus, les élèves possèdent déjà une certaine expérience des phénomènes permettant d'abstraire le concept de fonction. Ils ont même été confrontés à sa définition formelle. Comment la réutilisent-ils? Peuvent-ils décrire les images mentales associées à cette définition? Quel genre de réseau de connaissances ont-ils créé autour du concept de fonction? Quel mécanisme déclenchera son activation?

Ces questions préoccupent nos collègues, nous y reconnaissons bien nos propres préoccupations et c'est dans cet esprit que nous avons présenté aux élèves le questionnaire qu'ils ont rempli dès la première rencontre.

Nous donnons à l'annexe nº4 le texte de chaque question suivi des réponses obtenues, accompagnées chacune de ses fréquences absolue et relative. Dans la suite du texte, nous reprendrons à l'occasion les questions dans le seul but de faciliter la lecture.

Les questions se classent en deux catégories. Dans la première, l'élève doit résoudre des problèmes de complexité variée tandis que dans la deuxième il doit énoncer ou choisir des définitions. À nos yeux l'élève est beaucoup moins familier avec ce deuxième type de travail et nous avons conservé les résultats pour alimenter nos réflexions.

Par contre nous utilisons les résultats de la première catégorie pour en tirer une description générale, un reflet des connaissances acquises au secondaire. Ainsi le nombre de bonnes réponses pour ces six premiers problèmes, c'est-à-dire aux 17 premières questions, donne une vision d'ensemble du rendement des élèves résumée dans le tableau XVI.

Nombre de bonnes réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
0-2	3	3%
3-5	5	5%
6-8	18	20%
9-11	30	33%
12-14	24	26%
15-17	12	13%
92 répondants		

Tableau XVI. Résultats au questionnaire "État des connaissances"

5.2.1 La notation fonctionnelle

Les études américaines révèlent que la notation fonctionnelle est moins bien comprise que l'écriture centrée sur l'expression, elle occasionne plus que cette dernière l'inversion des variables.

Par rapport aux jeunes américains testés, un plus grand nombre de nos élèves ont de la difficulté avec l'algèbre élémentaire traitée au palier procédural (question nº1a), mais, leur connaissance résiste mieux à l'introduction de la notation fonctionnelle (question nº1b). Il est remarquable que nous rencontrons comme erreur la plus courante, une erreur dont Herscovics parle à propos de la mise en équation et qui consiste à inverser les deux variables. Or nous la rencontrons dans une question qui demande d'attribuer une valeur à une variable et cette question nous semble ne pas demander une compréhension très abstraite. On peut alors penser que l'élève qui confond la valeur de la variable et celle d'une expression qui la contient, ne peut pas attribuer à ces deux objets des rôles suffisamment distincts et non symétriques, pour concevoir l'expression comme une fonction de la variable; et on imagine mal qu'il puisse être prêt à utiliser la notation fonctionnelle. Cette erreur d'inversion se produit d'ailleurs plus souvent avec la notation fonctionnelle.

5.2.2 L'écriture d'une relation sous forme d'équation

Des 66 élèves qui reconnaissent qu'on obtient y en additionnant 7 à x, seulement 43 sont capables d'exprimer cette relation par une équation liant x et y, alors que les 23 autres (35%) ne peuvent pas produire cette représentation algébrique de la relation (question nº2). Ainsi, pour plus d'un élève sur trois, l'écriture sous forme d'équation d'une relation simple, qu'il a découverte, pose problème.

5.2.3 Les degrés de structuration

L'aide d'un support contextuel pour donner un sens au problème ne résout pas tout. Par exemple, 72% des élèves sont capables d'établir une équation relativement simple (question nº5c) et 73% d'entre eux de répondre à une question qui revient à trouver pour quelle valeur de x est-ce que 20+0,15x vaut 38,45. Cependant, on n'en retrouve que 60% pour calculer l'image d'une valeur de x qu'il faut au préalable calculer à partir des données du problème (question nº5a) et seulement 46% pour calculer une valeur qui est f(x+1)-f(x). Cela nous montre bien que des exercices relativement simples peuvent demander d'invoquer plusieurs degrés différents dans la compréhension du concept de fonction . Il nous semble que ce concept s'acquiert, comme tout concept, par restructurations successives mettant en cause chacun des niveaux de compréhension, et que l'élève peut avoir une compréhension intuitive ou procédurale qui lui permet de faire certains exercices simples sans pour autant réussir des exercices qui demandent une certaine abstraction. Nous ne sommes pas prêtes à dire comme Herscovics qu'un élève qui ne calcule pas une expression de la forme f(x+1)-f(x) ne semble pas voir de relation entre les variables, ni à mettre en question sur ce seul indice qu'il puisse voir une formule comme une fonction.

Même les tâches ne demandant qu'une compréhension procédurale des concepts de variable et de fonction peuvent être ordonnées selon le degré de structuration des connaissances requises. Ainsi, demander de substituer des valeurs numériques pour calculer un des éléments, le calcul de la variable dépendante par exemple, requiert une compréhension moins structurée lorsqu'elle est déjà isolée dans la relation algébrique que lorsqu'elle doit être isolée (question nº4).

On retrouve une gradation semblable dans plusieurs exercices et on peut même identifier certaines questions qui sont des perturbations telles que les élèves n'arrivent plus dans ce contexte à appliquer des règles pourtant connues. Par contre, les élèves capables de surmonter ces difficultés font preuve d'une solidification de leurs connaissances qui rendra leur utilisation plus efficace.

Ainsi, pour le décodage d'expressions écrites en notation préfixe, plus l'expression est complexe, plus elle demande une connaissance structurée. Il y a une forte déstabilisation quand on introduit une division par 0, traduite par des taux de réussite du décodage passant d'environ 80% à environ 20% (question nº6Aa, b et c).

Le codage demande une plus grande structuration que le décodage (question nº6B a et b), avec le même effet produit par une plus grande complexité de l'expression à coder. Quand on ajoute la nécessité de lire une expression algébrique décrite de façon discursive, les résultats semblent être meilleurs pour une expression symétrique, même si elle est plus complexe (question nº6C a et b).

5.2.4 La faible performance de certains élèves

La faible performance d'un certain nombre d'élèves soulève le problème des préalables jugés essentiels pour entreprendre un cours de pré-calcul. Pouvons-nous attribuer un pouvoir de prédiction au résultat global de ce questionnaire? Le relevé de notes du collégial de fin de session montre que parmi ceux qui ont obtenu moins de huit bonnes réponses, seulement 27% obtiennent la note de passage tandis que pour ceux qui ont obtenu plus de douze bonnes réponses ce taux de réussite passe à 86%.

En regardant de plus près, on retrouve dix élèves qui n'ont pas réussi à répondre à une seule question du problème 5.

QUESTION Nº 5

Monsieur Tremblay loue une voiture aux conditions suivantes:
il devra débourser 20$ de frais fixes (peu importe la durée du contrat) plus 0,15$ du kilomètre parcouru.
a) Si Monsieur Tremblay garde l'auto pendant 3 jours et s'il parcourt en moyenne 75 kilomètres

par jour, combien devra-t-il payer?
b) Combien de kilomètres aurait parcourus un client qui aurait payé 38,45$?
c) Établir une équation qui donnerait le coût total C de la location en fonction du nombre x de kilomètres parcourus.

Or de ces dix élèves, aucun n'a obtenu la note de passage à la fin de la session. Cette situation nous pousse à regarder de plus près les habiletés exigées par ce problème. Il fait appel à des habiletés en arithmétique d'une part et en algèbre d'autre part. Pour la première question, l'élève doit choisir correctement les opérations impliquées. Il rencontre deux types de difficultés. Il doit tenir compte des coûts fixes auxquels il ajoute les coûts variables selon le nombre de kilomètres parcourus. Dans un deuxième temps, il doit établir le nombre de kilomètres parcourus connaissant le nombre moyen par jour. Ainsi, terminer un raisonnement à plusieurs étapes demande de faire intervenir en **arithmétique** le même genre de processus que pour la composition de fonctions.

Si nous exprimons explicitement cette composition de fonctions, nous pouvons écrire C(D) est le coût total variant en fonction de la distance parcourue et $C(D) = 20 + 0,15\ D$ où D est la distance parcourue. Cette distance D(n) varie en fonction du nombre de jours car nous avons l'information de la distance parcourue en moyenne à chaque jour. $D(n) = 75\ n$. Donc, la solution pourrait s'exprimer par $C(D(n)) = 20 + 0,15\ (D(n)) = 20 + 0,15\ (75\ n)$. Bien entendu, nous n'exigeons pas ce type de notation algébrique mais l'élève doit reprendre ces deux étapes de raisonnement.

L'erreur la plus courante pour l'ensemble des répondants relève justement de la deuxième étape; 23% des élèves considèrent que la distance parcourue est de 75 km sans considérer le nombre de jours. Toutefois, ces élèves possèdent tous les éléments de solution pour la deuxième question où ils doivent retrouver la distance parcourue connaissant le coût total. Effectivement, la grande majorité de ces élèves calculent la distance parcourue correctement.

Les erreurs relevées pour les solutions des dix élèves n'ayant réussi aucune question sont révélatrices. À la première question, cinq de ces dix élèves mènent le bon raisonnement mais font une erreur de calcul. Deux autres déterminent le montant des coûts variables, mais n'ajoutent pas les frais fixes tandis que les trois derniers ne réussissent pas à interpréter le nombre de kilomètres moyen par jour durant trois jours. Il y a absence de recherche de relation. Les élèves ne semblent pas être guidés dans leur lecture par un cadre supérieur, ils travaillent pas à pas et restent dans le domaine de l'arithmétique.

À la deuxième question, un élève donne la bonne réponse sans en préciser les unités et un autre donne une approximation sans laisser de trace de son raisonnement. De plus, trois élèves tentent de déterminer le nombre de kilomètres en utilisant une règle de trois. Ceci nous rappelle le bon vieux réflexe observé si souvent chez nos élèves, par exemple, quand nous demandons aux élèves de résoudre des exercices semblables à celui-ci :

> On estime que le nombre d'heures de main-d'oeuvre requises pour distribuer les formulaires de recensement dans x% des foyers d'une localité est donné par la fonction N(x)=(600x)/(300-x). Combien d'heures de main-d'oeuvre faut-il pour distribuer les formulaires dans la moitié des foyers?Combien d'heures de main-d'oeuvre faut-il pour distribuer les formulaires dans tous les foyers?

Ayant répondu qu'il fallait 120 heures pour distribuer le formulaire dans la moitié des foyers, plusieurs élèves proposent naturellement 240 heures pour la totalité des foyers sans faire de calculs. Les élèves maîtrisent la règle de trois et veulent s'en servir le plus souvent possible. Ils n'en ont pas encore compris les conditions d'application et cette connaissance devient un obstacle à l'acquisition du concept de fonction.

Si nous revenons aux autres erreurs commises à la deuxième question, deux élèves ne répondent pas et les trois autres essaient de déterminer un coût.

Enfin, pour la troisième question, cinq ne répondent pas et les autres donnent des expressions incomplètes sans utiliser la notation fonctionnelle. Nous admettons que la question 5c présente une difficulté supplémentaire puisqu'elle demande de passer au niveau algébrique. Toutefois, 72% des élèves du grand groupe donnent l'équation à partir du contexte contre seulement 48% à partir d'une table (question 2b), ce qui nous permet de penser que la difficulté est réduite par la mise en situation

En résumé, pour répondre correctement à au moins une question de ce cinquième problème, il faut invoquer une compréhension abstraite en arithmétique. Dix élèves en sont incapables et n'ont pas réussi à faire de progrès notable au cours de la session. **Une compréhension abstraite de l'arithmétique serait-elle le seuil de compréhension minimal pour entreprendre le cours de pré-calcul? Que faire avec les élèves qui ne maîtrisent pas ce niveau?**

5.3 LES NEUF ÉLÈVES OBSERVÉS

Pour les 94 étudiants inscrits au cours 302, nous avons observé l'évolution de leur compréhension des concepts de variable et de fonction à partir de la correction d'une dizaine de devoirs et de quatre examens rédigés à intervalle régulier tout au cours de la session. Sous l'ampleur de la tâche, le champ de notre analyse s'est rétréci et nous avons choisi neuf élèves parmi les 92 qui avaient répondu au premier questionnaire pour les rencontrer individuellement afin de préciser les différentes conceptions de variable et de fonction. Bien que ne visant pas une analyse quantitative, nous voulions tout de même respecter la représentativité du groupe tout en nous gardant une certaine marge de manœuvre, car nous étions à la merci de la possibilité d'éventuels abandons. Aussi le choix fut réalisé à partir de quatre sous-groupes établis selon le niveau de réussite aux six premiers items du pré-test. Toutefois, nous verrons à la section 7.2 que le niveau de réussite à ce questionnaire ne permet pas de prédire la réussite du cours et il ne serait pas pertinent de s'en servir à cette fin. Nous décrivons brièvement les caractéristiques de chaque sous-groupe.

La réussite de la question 6Ac a servi de premier critère car elle fait appel à une compréhension abstraite en arithmétique. Ainsi nous avons retenu comme premier sous-groupe, tous ceux qui avaient reconnu la division par zéro et qui précisaient l'impossibilité d'obtenir un résultat ou encore qui choisissaient de ne pas répondre. Ces derniers répondaient tous très bien aux autres questions.

Comme deuxième critère, nous avons considéré tous ceux qui avaient réussi les questions 1a, 1b et 2a. Les bonnes réponses de cette catégorie mettaient en évidence tous ceux qui réussissaient des calculs simples, qui utilisaient la notation fonctionnelle et qui reconnaissaient la règle de calcul à partir d'une table de couples. Les élèves de cette catégorie invoquaient une certaine compréhension abstraite.

Parmi les élèves non-classés, comme troisième critère, nous avons considéré la capacité d'établir la notation fonctionnelle à partir d'un contexte familier, à la question 5c, et la réussite d'un décodage simple aux questions 6Aa et 6Ab. Ceux-ci pouvaient faire un premier pas dans l'abstraction.

Enfin, pour le quatrième sous-groupe, les élèves qui restaient, présentaient de sérieuses difficultés en arithmétique et en algèbre (notons au passage que leur nombre n'est pas négligeable). Ils invoquaient à l'occasion une compréhension procédurale. Nous doutions alors de la pertinence de la séquence que nous allions leur proposer et nous observons maintenant que la grande majorité de ces élèves ont abandonné ou échoué le cours.

Nous reprenons dans le tableau XVII la description de la répartition des élèves selon les sous-groupes identifiés plus haut. Pour faciliter la lecture et assurer la confidentialité, nous utiliserons un prénom fictif pour ces neuf élèves.

Pour les antécédents scolaires, Francis, Carole, Marc et Éliane avaient réussi la voie régulière 414-434-534. Nicole a suivi de plus le cours 514 tandis qu'Anne et Christophe ont échoué le cours 534 au premier essai. Christiane a un cheminement particulier ayant déjà obtenu un diplôme d'études collégiales dans un autre programme et Nadine n'a pas suivi le 534, a échoué le 514 la première fois et a échoué le cours 201-302 à la session précédente. Nous pouvons dire que dans ce sous-groupe on retrouve une bonne gamme des cheminements identifiés au départ pour l'ensemble des 94 élèves (annexe nº3)

Sous-groupe	Critères	Répartition des 92 étudiants	Répartition des 9 choisis
1	- n'effectue pas la division par 0 - répond très bien aux autres questions	7	Christophe et Nicole
2	- réussit des calculs simples - utilise la notation fonctionnelle - reconnaît la règle dans une table	43	Nadine, Christiane et Francis
3	- établit la notation fonctionnelle à partir d'un contexte familier - réussit un décodage simple	18	Carole et Anne
4	- sérieuses difficultés en arithmétique et en algèbre - compréhension procédurale occasionnelle	24	Marc et Éliane

Tableau XVII. Choix des élèves observés

Pour l'enseignement les élèves sont répartis en trois groupes d'environ 30 élèves. Ces groupes sont numérotés par le Collège 4109, 4110 et 4111. Anne, Christiane, Francis et Nadine sont dans le groupe 4109, Christophe, Éliane et Nicole dans le groupe 4110 et Carole et Marc dans le groupe 4111. L'évaluation de leur rendement scolaire se fait donc avec leur groupe de base respectif selon les modalités décrites à l'annexe nº5.

6

Le Rapport de l'Ensemble

des élèves au savoir

La didactique n'est pas réduite à une technologie et sa théorie n'est pas celle de l'apprentissage, mais celle de l'organisation des apprentissages d'autrui ou plus généralement celle de la diffusion et de la transposition des connaissances.
Brousseau, Les différents rôles du maître, p. 22

Dans ce chapitre, nous reprenons l'observation de la relation entre le savoir savant et celui construit par l'ensemble des élèves.

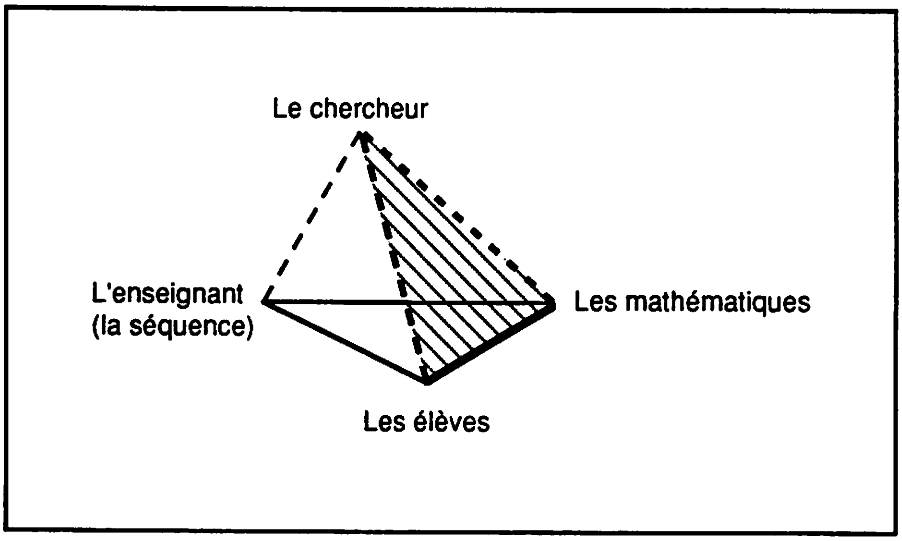


Figure 5. L'analyse des productions des élèves et de leur rapport au savoir

L'analyse du rapport de l'ensemble des élèves au savoir fait ressortir des différences entre les leçons en ce qui a trait à la progression du savoir. On trouve des leçons lors desquelles on fait essentiellement de la consolidation des connaissances préalablement acquises. Par opposition, il y en a d'autres où il se produit un saut conceptuel, une rupture. Ce sont des moments où "tout" est repris après-coup. Bien sûr ce qui est remanié après-coup n'est pas vraiment tout, c'est ce qui, au moment où il a été vécu, n'a pu pleinement s'intégrer dans un contexte significatif. Il y a alors une réorganisation qui annule les structures antérieures, d'où cette impression de "tout" reprendre, pour en réinsérer les matériaux en des constructions inédites. (Chevallard, 1985)

Nous appelons ces leçons des leçons-clé. Le terme fait plus référence à un élément de savoir qu'à un moment dans la session. En effet, certains élèves mettent plus de temps que d'autres à comprendre en particulier le point de départ de ces remaniements en profondeur occasionnés par des situations de **conflit** entre une connaissance ancienne et la connaissance nouvelle. De ce fait le conflit n'a pas lieu chez tous au même moment.

Ce que nous en observons, vu nécessairement de l'extérieur, ce sont deux moments que nous pouvons qualifier d' "avant" et d' "après". Avant la rupture, l'élève n'a pas accès à la nouvelle structure, il est incapable de remplir certaines tâches, sauf peut-être dans des cas particuliers simples et de façon instable; après cette rupture, il dispose d'un nouveau cadre de travail dans lequel effectuer ces tâches qui lui paraissent très faciles.

> *L'objet d'enseignement réalise donc un «équilibre» contradictoire* ***entre passé et avenir****: il est un* ***objet transactionnel*** *entre passé et avenir. (Chevallard, 1985, p. 67)*

Nous reprenons donc les activités de laboratoire présentées aux élèves en décrivant en détail le comportement des neuf élèves cités plus haut et nous en proposons une analyse dont le but est d'identifier les leçons-clé.

La lecture peut être facilitée par un retour à la description des intentions faite au quatrième chapitre.

6.1 Premier laboratoire

Nous visons l'apprentissage de la gestion des fichiers. Pour cela, nous demandons aux élèves d'écrire cinq procédures à partir de la procédure DOUBLE puis nous vérifions le contenu de la disquette de chaque élève. Dans l'ensemble, les élèves s'en tiennent à une simple imitation de cette procédure. Nous retrouvons TRIPLE, QUADRUPLE et QUINTUPLE. Nicole écrit une procédure DOUZAINE en additionnant :X douze fois. Certains écrivent CUBE et CARRÉ en utilisant la multiplication. Francis est le seul à utiliser deux entrées pour écrire la procédure DIVISE. Christiane et Nicole écrivent QUART et DEMI.

Les élèves doivent nous fournir des procédures qui produisent le résultat demandé. En général, le nom des procédures est écrit au long, sans apporter de nom fantaisiste. Francis a créé la procédure qui élève à la puissance deuxième, nommée METTRE pour "METTRE AU CARRÉ".

Dans un premier temps, nous avons ramassé une disquette par équipe de travail pour observer si le regroupement des deux fichiers était fait et si les cinq procédures avaient bien été écrites. Suite à cette correction, les élèves disposent d'une dizaine de minutes pour rectifier leurs erreurs ou pour compléter leur travail. À l'intérieur de ce délai, les élèves réussissent à nous proposer des procédures dont la syntaxe est satisfaisante car les corrections à apporter sont minimes. Toutefois, les élèves ne prennent pas en main la gestion des fichiers car l'organisation des fichiers leur paraît secondaire par rapport à la construction des procédures. Il faudra attendre jusqu'au quatrième laboratoire avant que les élèves ne fassent ce travail de façon efficace, poussés par l'obligation de reprendre des procédures déjà créées et par la forme de correction que nous avons adoptée. Nous utilisons des procédures de correction non sophistiquées qui obligent l'élève à respecter la forme sous laquelle nous demandons les procédures et les fichiers.

En ce qui concerne le codage, plusieurs habitudes se prennent très tôt: les deux points devant le nom, sans espace, pour désigner une variable, l'utilisation du mot RETOURNE et l'utilisation de la structure suivante:

Ligne titre: POUR *Nom de la procédure* *Les entrées*
Ligne instruction: RETOURNE *Expression de la fonction*
Ligne terminale: FIN

Il serait pertinent de faire une analyse des choix de représentation pour les différents objets manipulés, comme nous l'avons noté au chapitre 4, nous envisageons de le faire dans un autre document.

6.2 Deuxième laboratoire

À la fin du deuxième laboratoire, nous proposons deux questions auxquelles les élèves doivent répondre individuellement en 15 minutes.

> *1. Écrire l'instruction Logo qui permettrait de faire calculer par l'ordinateur l'expression arithmétique suivante (Utiliser pour cela les primitives préfixes.)*

Version 1 (gr. 4110 et 4111) $\frac{-(-3+6)}{5(7-2)}$ *Version 2 (gr. 4109)* $\frac{-(-8+5)}{3(9-4)}$

2. Tracer le diagramme de plomberie qui correspond à l'expression Logo suivante

Version 1(gr. 4110 et 4111) QUOTIENT PUISSANCE SOMME 7 3 2 RAC SOMME 12 13

Version 2:(gr. 4109) QUOTIENT PUISSANCE DIFFÉRENCE 7 3 2 RAC SOMME 12 13

À la question 2, si l'élève arrive à produire le résultat de l'expression, on peut dire qu'il a décodé celle-ci convenablement. C'est le cas de Nicole, Nadine, Francis, Anne et Eliane. Ces élèves invoquent une compréhension procédurale des règles de traduction d'une expression préfixée vers l'écriture arithmétique traditionnelle.

Si nous regardons de plus près les erreurs, il semble que Carole ait une bonne vision locale comparativement à Christophe qui perçoit la structure globale de l'expression. Dans les deux cas, la tâche n'est pas accomplie au complet de façon satisfaisante et on peut dire que c'est dû à la complexité de l'expression. Carole semble capable d'enchaîner deux opérations de suite mais pas trois et Christophe, bien que percevant la structure globale, n'associe pas toujours le bon nombre d'entrées aux opérateurs. Ces deux comportements correspondent chacun à un type d'analyse bien connu des informaticiens: l'analyse descendante (en anglais top-down) et l'analyse montante (en anglais bottom-up). L'une ou l'autre permettrait de résoudre l'exercice et il est intéressant de remarquer que les élèves peuvent utiliser naturellement des types d'analyse différents. Nous suggérons de ne pas imposer un modèle unique de raisonnement et même d'être attentif à utiliser avec un élève en particulier le mode d'analyse qu'il privilégie lui-même. La question du nombre d'entrées par opérateur se pose dans le cas de Marc qui associe de façon erronée trois entrées à l'opérateur SOMME tout comme Christophe. Toutefois, Marc ne complète pas l'exercice; il ne manifeste pas de compréhension procédurale pour le décodage.

Un autre type de difficulté semble lié à la nomenclature. Peu d'élèves savent distinguer entre les noms d'opérations (addition, soustraction, multiplication, division) et les noms de leurs résultats (somme, différence, produit, quotient). Ils sont plus familiers avec les mots désignant les opérations; or nous utilisons les mots désignant les résultats. Est-ce ce manque de familiarité qui amène Christiane à écrire produit lorsqu'on demande différence?

En conclusion, tous sauf Marc réussissent à invoquer un certain degré de compréhension procédurale des opérateurs, de leurs résultats et de leurs opérandes.

Pour le codage à l'aide des primitives préfixes, tous reconnaissent la somme, la différence et le produit. La difficulté qui ressort est le codage du signe - devant la parenthèse qui contient une somme. Aucun élève ne l'a interprété comme l'opposé. La plupart ont utilisé le produit de -1 par la somme. Marc a choisi tout simplement de ne pas tenir compte du signe - et Nadine l'a codé à l'aide de DIFFERENCE avec une seule entrée, la somme. Selon la solution de chacun pour l'opposé, tous reprennent le quotient. Christiane et Eliane ajoutent des parenthèses pour bien identifier les opérandes. Tous démontrent une compréhension abstraite de la notation arithmétique qui leur permet d'effectuer le codage en préfixe. Toutefois, cette compréhension ne résiste pas à l'introduction d'opérations monadiques.

La représentation d'une expression avec un diagramme de plomberie se révèle plus difficile que le codage à l'aide des primitives préfixes. Eliane et Nicole (figure 24) tracent le diagramme de plomberie selon les modalités vues en classe. La représentation de Francis (figure 25) est juste et plus synthétique. Il utilise un arbre pour représenter la structure de l'expression sans tracer de boîtes pour les opérateurs.

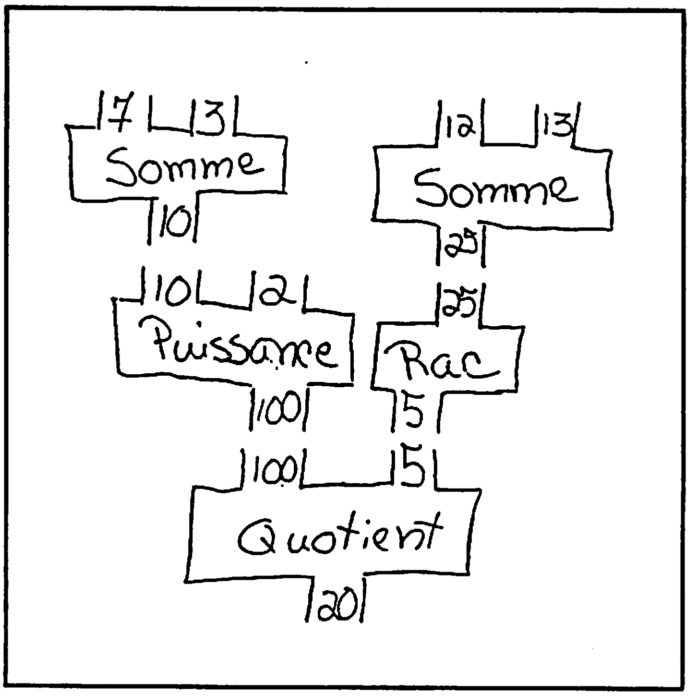


Figure 24. Nicole: diagramme de plomberie d'une expression préfixée

On doit noter la difficulté de déterminer combien une certaine opération requiert d'opérandes. Citons quatre erreurs que nous avons rencontrées. Aucun élève des trois groupes ne perçoit l'opposé comme une opération monadique; Christiane perçoit la racine carrée comme une opération diadique; Nadine code la puissance deuxième comme une opération monadique et enfin, Christophe et Marc donnent trois opérandes à l'addition. Ces erreurs ne nous semblent pas devoir être corrigées de la même façon. **L'opposé d'un nombre comme cas particulier de l'inverse au sens de la théorie des groupes, nous semble utile à la résolution d'équation.** Ceci justifie que nous fassions **un effort particulier pour présenter cette opération monadique.** Nous envisageons d'inclure une procédure pseudo-primitive nommée OPPOSÉ.

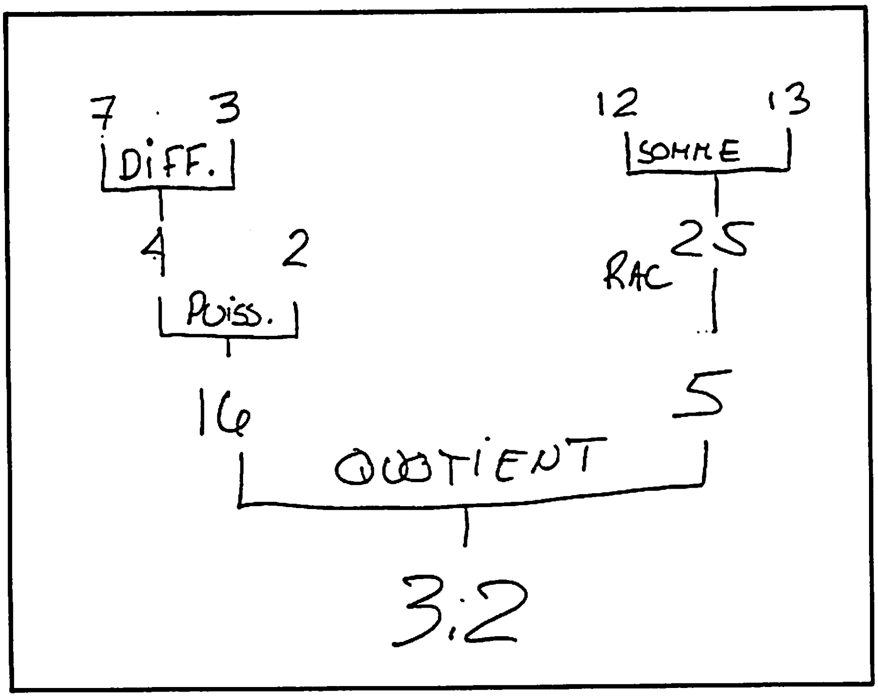


Figure 25. Francis: diagramme de plomberie d'une expression préfixée

L'idée de la racine carrée comme une opération diadique faisant appel à un opérateur hypothétique plus général que celui dont on dispose, peut être discutée avec l'élève. Sans renforcer cette manière de voir les choses, car elle est localement inopérante, on peut encourager l'élève à se développer un opérateur plus général.

Par contre, le carré comme opération monadique nous semble une conception restrictive de la puissance que nous ne pensons pas devoir encourager. Si toutefois l'élève veut discuter de ce genre de problème, nous suggérons de l'amener à distinguer variable et paramètre. On pourra alors mentionner que les puissances entières de x s'obtiennent par PUISSANCE :X :N tandis que les exponentielles s'obtiennent par PUISSANCE :A :X .

La dernière difficulté qui consiste à considérer les trois nombres 7, 3, et 2 comme les opérandes de la somme nous paraît en majeure partie imputable à notre enseignement. En effet, la syntaxe Logo permet de donner plus de deux opérandes à tout opérateur associatif à condition d'utiliser des parenthèses avant l'opérateur et après le dernier opérande. Nous avons donné un exemple et deux exercices portants sur l'addition et la multiplication. Or ceci vient contredire la règle générale du nombre d'entrées, trop tôt dans la session alors que les élèves ne l'ont pas encore maîtrisée. Nous reporterons cette discussion vers le onzième laboratoire au moment du traitement des longues listes.

En plus de la difficulté à identifier les opérateurs et les opérandes, on doit aussi considérer la difficulté à représenter la structure dans laquelle ces éléments sont combinés. Cette structure est un arbre (figure 26) dont les feuilles sont des nombres, chaque noeud subséquent représentant à la fois l'opérateur et son résultat. Dans le diagramme de plomberie, on distingue les opérateurs représentés par des boîtes et les opérandes représentés par des nombres. L'ordre des opérations est indiqué par des flèches dont le sens est un support intuitif pour les transformations successives.

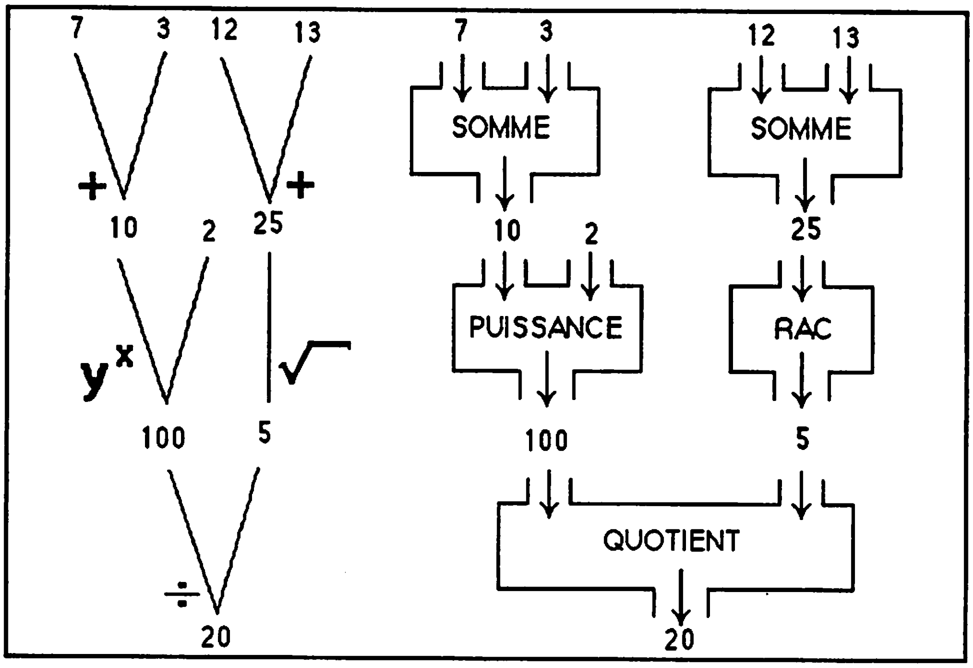


Figure 26. Structure d'une expression représentée par un arbre
et par un diagramme de plomberie

Pour la représentation, on rencontre trois types d'erreur. Carole se développe une représentation en arbre mais ne réussit pas à agencer plus de deux opérations ensemble. Marc représente les opérandes par une boîte, inverse les deux représentations et se retrouve devant l'impossibilité de continuer. Bien qu'ayant convenablement décodé l'expression, Anne représente deux opérations dans la même boîte. De plus, elle établit une communication entre deux boîtes alors qu'aucun transfert de résultats ne le justifie.(figure 27)

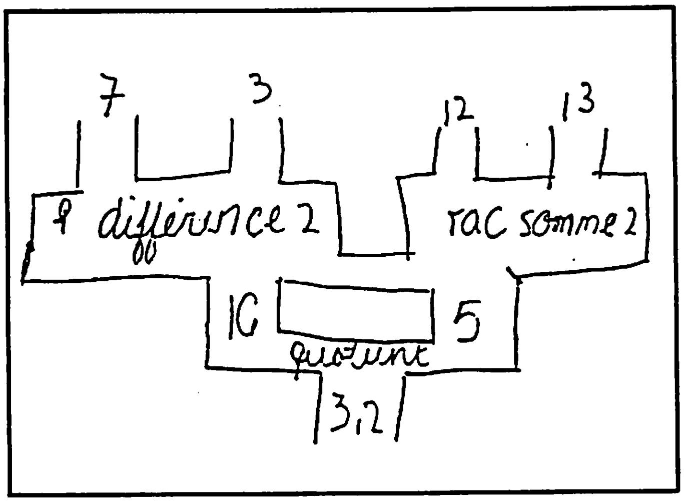


Figure 27. Anne: diagramme de plomberie d'une expression préfixée

On peut dire que Marc n'a pas compris la représentation et que Carole n'en a qu'une compréhension partielle. Pour comprendre le travail d'Anne, nous avons consulté un résumé synthèse qu'elle avait fait en préparation à un premier examen et dans lequel elle illustre une expression à l'aide du diagramme de plomberie. (figure 28)

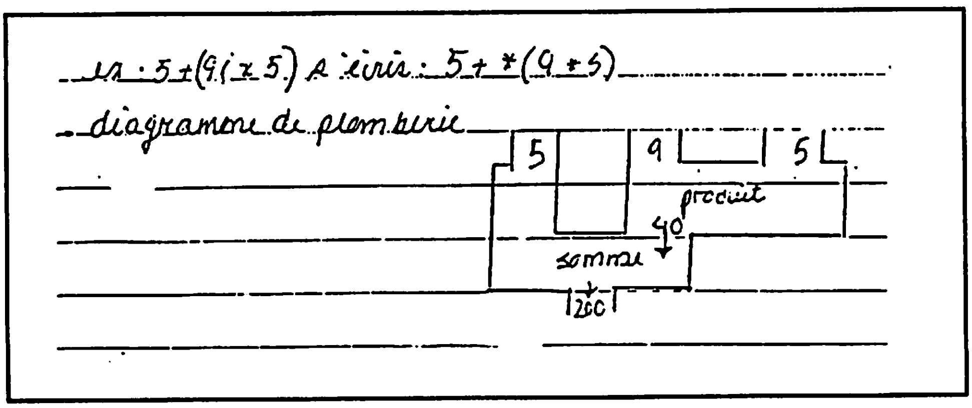


Figure 28. Anne: un exemple personnel de diagramme de plomberie

Dans son texte, nous remarquons une confusion entre les primitives préfixes et infixes, confusion qui apparaissait déjà lors du questionnaire préliminaire. Anne dira même lors de la première entrevue, qu'elle n'a jamais vraiment compris le diagramme de plomberie. Nous observons qu'elle essaie de contourner la difficulté en utilisant l'algèbre pour le calcul de l'image d'un élément par une composée (figure 30) et pour la détermination du domaine de la composée (figure 29) au premier examen, ceci sans succès.

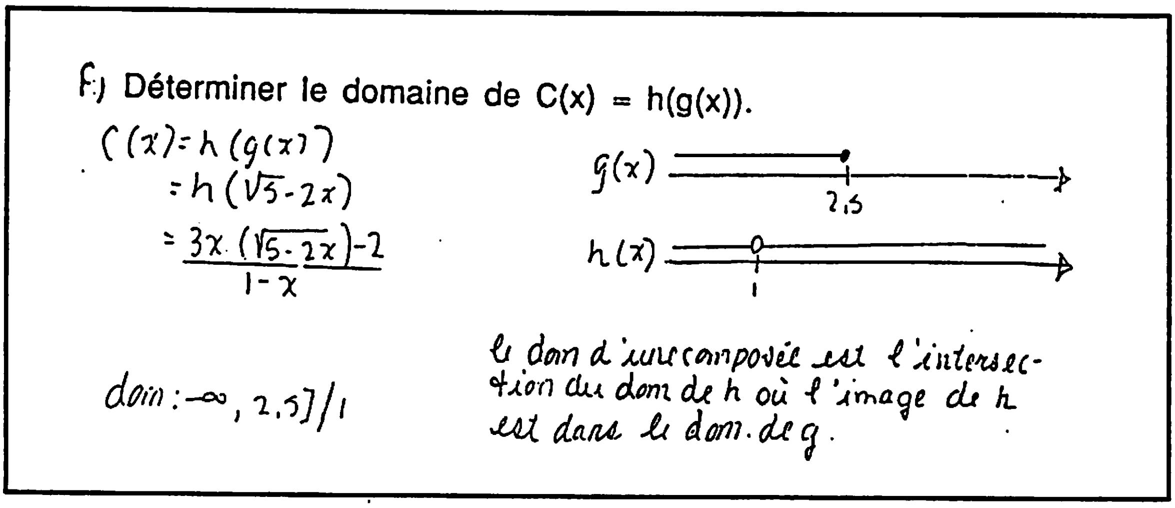


Figure 29. Anne: domaine de la composée de deux fonctions

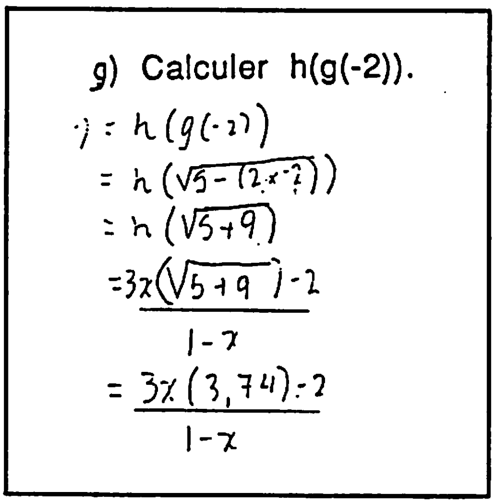


Figure 30. Anne: calcul de l'image d'un élément par la composée de deux fonctions

La représentation d'une expression avec des primitives préfixes ou par un diagramme de plomberie nous semble mettre en jeu chez l'élève, une réflexion sur son propre processus d'évaluation. Il s'agit d'identifier les opérateurs et leurs opérandes, puis de les représenter en respectant une certaine disposition linéaire dans le cas d'une expression préfixée ou encore une disposition spatiale (en arbre) dans le cas du diagramme de plomberie.

L'exercice de représenter l'expression à l'aide du diagramme de plomberie, qui nous semblait être une occasion d'examiner la structure sous un autre angle, **se révèle inefficace quand le concept n'est pas maîtrisé.** Nous pensons avoir touché là quelque chose d'important dans le cadre de l'enseignement : **quelle est l'aide véritable apportée par une représentation symbolique pour comprendre un concept?** Anne et Marc seraient-ils incapables de manipuler le symbolisme parce qu'ils n'ont pas suffisamment bien maîtrisé le sens des objets censés être représentés par ce symbolisme?

6.3 Troisième laboratoire

6.3.1 Représentation d'une fonction par une procédure

L'un des objectifs du troisième laboratoire est d'écrire une procédure qui calculera l'image de x par la fonction f. L'élève doit écrire une telle procédure au premier examen. Voici le texte des deux versions.

Version 1 Question 1
Étant donné les fonctions:

$$f(x) = \frac{4-x^2}{2} \quad g(x) = \sqrt{5-2x} \quad h(x) = \frac{3-2x}{1-x},$$

a) Déterminer le domaine des 3 fonctions f, g et h.
b) Écrire la procédure correspondant à la fonction g(x).
c) Que devriez-vous taper pour faire calculer g(-3) par l'ordinateur?
d) Déterminer le domaine de Q(x) = g(x) / h(x).
e) Illustrer le fonctionnement de C(x) = h(g(x))à l'aide d'un diagramme de plomberie.
f) Déterminer le domaine de C(x) = h(g(x))
g) Calculer h(g(-2))

Version 2 Question 3
3. Soit les fonctions suivantes:

$$f(x) = \sqrt{3-2x} \quad g(x) = \frac{1+2x}{1-x} \quad h(x) = \frac{1+3x}{5}$$

a) Déterminer le domaine de f(x).
b) Écrire une procédure qui permettrait de calculer l'image de g(x) et préciser comment vous utiliseriez cette procédure pour faire calculer g(5).
c) Si P(x) = h(x)×g(x), déterminer le domaine de P(x).
d) Si Q(x) = f(x)/h(x) déterminer le domaine de Q(x).
e) Utiliser le diagramme de plomberie pour expliquer le fonctionnement de g(h(x)).
f) Si C(x) = g(h(x)) déterminer le domaine de C(x).
g) Calculer h(g(2)).

La situation proposée à l'examen diffère quelque peu de la tâche exigée au laboratoire car l'élève n'a plus sous les yeux le modèle de la procédure DOUBLE présentée au premier laboratoire et reprise par une description verbale au troisième laboratoire. On peut penser qu'il y aura une difficulté supplémentaire, celle de décider d'utiliser le modèle. Du point de vue mathématique, cela correspond à distinguer une fonction de son expression. Par ailleurs, l'élève devra écrire convenablement son expression.

Cinq de nos neuf sujets (Francis, Christiane, Nicole, Carole et Christophe) réussissent.(figures 31 et 32)

b) Ecrire la procédure correspondant à la fonction g(x).

To g :x
Retourne Rac Différence 5 Produit 2 :x
END

Figure 31. Francis: représentation d'une fonction par une procédure

b) Ecrire une procédure qui permettrait de calculer l'image de g(x) et préciser comment vous utiliseriez cette procédure pour faire calculer g(5)

Rentrer dans l'éditeur
Pour g :x
Retourne Quotient Somme 1 produit 2 :x Différence 1 :x
End

Retourner dans l'espace de travail
Ecris g 5

Figure 32. Nicole: représentation d'une fonction par une procédure

Remarquons que ces cinq élèves ont utilisé les primitives préfixes. Quand l'élève comprend cet exercice, il nous semble qu'il choisit de l'écrire en préfixe, étant plus sûr de l'exactitude de sa réponse exprimée avec cette notation. Ce pourrait être l'indice d'un manque de maîtrise de la notation infixe et en particulier des priorités des opérations, même dans la notation algébrique habituelle.

Nous avons signalé que cet exercice demandait de distinguer fonction et expression. Nadine ne donne que l'expression avec une erreur de codage (oubli du codage de la multiplication). Anne, bien qu'elle soit capable d'écrire la fonction sans erreur plus loin, ne reconnaît pas qu'on le lui demande. Nous pensons que ces deux élèves confondent fonction et expression.

Eliane et Marc différencient fonction et expression mais utilisent à la fois des primitives infixes et préfixes dans leur codage. Le codage d'Eliane grâce à une tolérance du système, représenterait bien la fonction alors que celui de Marc dans lequel la même opération est représentée deux fois, ne serait pas exécuté. Comparons ces difficultés de codage avec le travail produit au contrôle du deuxième laboratoire. Eliane et Marc réussissent bien à coder une expression numérique à l'aide des primitives préfixes. Ils ont dû coder seize fonctions lors du troisième laboratoire mais la connaissance acquise n'est pas suffisamment stable pour réussir ce codage au premier examen. Dans la suite du cours, lors d'un examen portant sur le neuvième laboratoire, les élèves auront à écrire une fonction. Ni Eliane, ni Marc n'y parviendront. En fin de session, le problème n'est réglé ni pour l'un ni pour l'autre. En effet, quand on demande d'écrire une procédure équivalente à une procédure donnée sans utiliser la même variable, Eliane ne change la variable que dans la ligne titre et pas dans le corps de la procédure, tandis que Marc n'essaie même pas de le faire.

L'écriture d'une procédure représentant une fonction est un apprentissage qui présente une certaine fragilité puisque Carole et Christophe, bien que maîtrisant en fin d'année le changement de variable, ne réussissent pas l'écriture d'une fonction lors de l'évaluation du neuvième laboratoire.

6.3.2 Première leçon-clé, la représentation d'une fonction par une procédure

Cette leçon nous semble être une leçon-clé.

Elle contient toute une pièce du tissu conceptuel: l'évaluation des expressions arithmétiques, le codage en Logo des expressions algébriques et la distinction entre une expression algébrique et la fonction qu'elle permet de calculer.

Le tableau XVIII présente les élèves qui ont réussi à dresser un diagramme de plomberie et à représenter une fonction par une procédure au deuxième laboratoire et lors du test sur le neuvième laboratoire.

	diagramme de plomberie	représenter une fonction par une procédure (lab 2)	représenter une fonction par une procédure (lab 9)
Christiane	réussi	réussi	réussi
Francis	réussi	réussi	réussi
Eliane	réussi	réussi	réussi
Nicole	réussi	réussi	réussi
Carole		réussi	
Christophe		réussi	
Anne			réussi
Nadine			
Marc			

Tableau XVIII. Réussite du diagramme de plomberie et de la représentation d'une fonction par une procédure

On peut reconnaître dans ce tableau une configuration que Chevallard (1985) décrit comme une "active «solidarité du manque»". D'après lui

> *(un concept) ne vient à l'existence que dans le cadre d'un* système de concepts *où [...], se pratique une active «solidarité du manque». (p. 90)*

Ici, l'absence de compréhension abstraite de l'évaluation d'une expression arithmétique est solidaire de l'absence de compréhension du codage d'une fonction deux semaines après, et de cette même absence neuf semaines plus tard.

Ceci nous porte à croire que le **nœud de connaissance** dans cette leçon est la connaissance mise en jeu dans la **représentation d'une expression arithmétique par un diagramme de plomberie**. Comme nous l'avions mentionné lors de l'analyse des intentions du second laboratoire, représenter une expression arithmétique par un diagramme de plomberie nous semble mettre en jeu une réflexion sur son propre processus d'évaluation des expressions, suivie d'un codage. Nous avions classé la réussite de cet exercice comme demandant une compréhension abstraite. Il s'agit en effet d'une décontextualisation à la fois par rapport à l'expression arithmétique et par rapport au diagramme de plomberie d'une seule opération, afin de se construire une connaissance qui s'applique aux deux.

Cette connaissance nous semble jouer un rôle important dans le cours de pré-calcul. Nous nous proposons d'analyser à quel titre elle intervient dans ce cours. Le diagramme de plomberie n'est pas un objet du savoir mathématique et n'est pas enseigné à ce titre. C'est plutôt un objet paramathématique, ayant un nom, donc pouvant être nommé, et utilisé comme outil mais non pris comme objet d'étude.

Nous voyons le diagramme de plomberie, placé dans le contexte de la représentation d'une fonction par une procédure, comme le **résultat d'un apprêt didactique d'une connaissance**, celle de l'évaluation des expressions arithmétiques et algébriques. Pour mieux préciser son statut nous pouvons le comparer à deux autres objets obtenus de la même façon et que nous avons déjà mentionnés, le diagramme de Venn dans la théorie des ensembles et les flèches du développement algébrique du produit de deux binômes.

Les diagrammes de plomberie, comme les diagrammes de Venn, sont des représentations de relations entre des objets mathématiques, les opérations et leurs opérandes autant pour l'arithmétique que pour l'algèbre. Ils apparaissent dans bien des livres et en particulier pour représenter les «machines» avec lesquelles l'enseignement primaire présente les fonctions. Toutefois, il ne nous semble pas qu'ils aient été à ce point utilisés qu'ils en soient déjà institutionnalisés. Tout au plus sont-ils peut-être en train de naître au statut d'objet d'enseignement. L'analyse de Freudenthal (1983), au sujet de la perte du contexte conceptuel (et par là même du sens de la théorie des ensembles au moment de sa transposition didactique), nous incite à la **prudence**. Nous devons nous garder d'introduire avec nos diagrammes de plomberie des fonctions qui seraient triviales et ne pourraient pas, par abstraction, servir à étudier de véritables phénomènes.

La comparaison avec les flèches nous incite à la **vigilance**. Si la transposition didactique est nécessaire, s'il peut arriver qu'on crée des objets didactiques à cette occasion, au moins doit-on avoir la prudence de vérifier l'impact de ces créations. La fidélité à une certaine culture nous paraît pouvoir jouer le rôle de garde-fou en cette matière. Pour ce qui est des diagrammes de plomberie, nous n'avons pas constaté qu'ils puissent se constituer en obstacle à la construction d'autres connaissances.

6.3.3 Le domaine d'une fonction

Un deuxième objectif du troisième laboratoire est de déterminer le domaine d'une fonction. Reprenant les réponses au premier examen, nous pouvons dégager les questions faisant appel au domaine d'une fonction de façon explicite, par opposition à celles qui y faisaient appel de façon implicite à partir des opérations sur les fonctions.

Pour le premier cas, tous sauf Nadine, Christophe et Carole, répondent correctement. Les trois autres ont des difficultés à traiter le domaine d'une fonction qui comprend une racine carrée, soit qu'ils ne savent pas résoudre une inéquation du premier degré, soit qu'ils travaillent uniquement avec les entiers. La détermination du domaine en tant qu'ensemble des valeurs admissibles de la variable, à partir de l'expression de la fonction, nous semblait faire partie des connaissances préalables et le but du laboratoire était seulement d'enrichir des connaissances avec l'intention de les réutiliser au quatrième laboratoire. Les élèves connaissent bien les principes à appliquer mais les difficultés d'ordre algébrique les empêchent de mener à bien les calculs.

Six des neuf élèves démontrent une compréhension procédurale du domaine d'une fonction, les trois autres ayant un empêchement causé par des éléments de domaines antérieurs de la trame conceptuelle.

6.4 Quatrième laboratoire

6.4.1 Les opérations sur les fonctions

Au quatrième laboratoire, les élèves travaillaient les opérations sur les fonctions et le domaine des fonctions résultats. Pour analyser leur compréhension, nous disposons des questions du premier examen citées précédemment.

Au moment où les élèves ont codé la composition de deux fonctions, nous avons vu plusieurs d'entre eux tenter d'utiliser le produit afin de traduire l'écriture f(g(x)). Certains ont codé

```
POUR C :X
RETOURNE PRODUIT F G :X
END
```

Une particularité du système fait que cette expression est évaluée de la droite vers la gauche, ce qui s'interprète par l'évaluation de g(x) puis de f(g(x)) et enfin par l'exécution de la primitive PRODUIT qui, avec une seule entrée, multiplie cette entrée par 1. Le résultat de cette procédure donnait donc bien f(g(x)). Pour l'élève qui tentait de faire une vérification numérique, il n'y avait pas moyen de voir son erreur. C'est le professeur et non le système qui obligeait l'élève à se poser des questions.

Nous voyons dans cette tentative de solution, le signe d'une interprétation des parenthèses comme un produit et nous avons tenté de modifier cette lecture de f(g(x)) en expliquant le sens de la notation à l'aide du diagramme de plomberie.(figure 33)

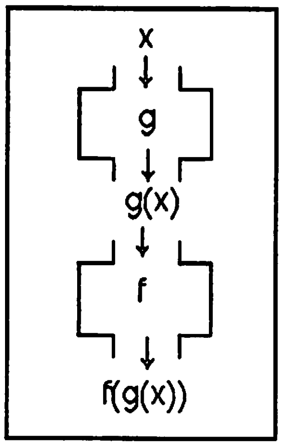


Figure 33. Diagramme de plomberie de la composée f(g(x))

Suite à ces observations, et comme nous n'avions jamais remarqué cette erreur auparavant, nous avons pensé demander aux élèves dans la deuxième entrevue, de nous expliquer la différence entre le produit et la composition. Pour les élèves, il est plus difficile d'utiliser les sous-concepts associés comme celui de domaine que d'exprimer la différence entre le produit de deux fonctions et leur composée.

À l'examen, tous peuvent produire un diagramme de plomberie ayant la forme du diagramme de la composée. Christophe n'utilise pas les bonnes notations et il est le seul à ne pas pouvoir calculer l'image d'un réel donné par une fonction composée. Le groupe des élèves qui réussissent, diminue au moment de produire ce calcul numérique et diminue encore au moment de déterminer le domaine. On peut expliquer ce fait par la progression du degré d'abstraction demandé par chacun de ces exercices. Bien que tous ces exercices demandent une compréhension procédurale, le diagramme met en œuvre la mémorisation, le calcul de la valeur peut se faire pas à pas et ne demande qu'une compréhension très locale alors que la détermination du domaine fait appel à des relations entre les contraintes des différentes étapes.

Anne démontre qu'elle a une idée physique exprimant la nécessité de "faire entrer une fonction dans l'autre"; Marc et Nadine n'ont aucun souvenir et Christophe confond la composition avec l'intersection de deux fonctions. À l'entrevue (annexe n°6), seuls ceux qui avaient rempli correctement l'ensemble de ces tâches peuvent trois semaines plus tard expliquer le sens de la composition, celui de la multiplication et distinguer clairement ces deux opérations. Ces cinq étudiants démontrent une compréhension abstraite des opérations sur les fonctions.

Aucun des quatre autres n'invoque une compréhension abstraite de la composition de deux fonctions. Deux d'entre eux (Nadine et Marc) calculent une image numérique sur demande, à l'examen, mais aucun n'a l'idée de fournir un tel exemple à l'entrevue.

Quant aux opérations algébriques sur les fonctions (l'addition, la soustraction, la multiplication et la division) tous démontrent avoir une compréhension intuitive de ce qu'est le produit de deux fonctions. On peut penser qu'ils exprimeraient le même genre de connaissances des autres opérations et en particulier de la division. Dans l'examen, quand on passe à la détermination du domaine du quotient de deux fonctions, Christiane, Eliane et Nicole déterminent convenablement le domaine. Francis, Anne, Nadine et Christophe ne tiennent pas compte de la nécessité, pour la fonction diviseur, d'être différente de zéro. Carole énonce convenablement les conditions mais ne mène pas le calcul au bout et Marc, au lieu d'éviter la valeur zéro pour la fonction diviseur, l'évite pour le dénominateur de celle-ci.

Soulignons ici que dans le même examen, on demandait de déterminer le domaine d'une fonction donnée explicitement sous forme d'un quotient et que tous les étudiants réussissent cet exercice. On doit donc admettre que si une compréhension procédurale en arithmétique permet de déterminer le domaine d'une fonction donnée explicitement, elle ne suffit pas à déterminer le domaine d'une fonction définie comme étant de la forme f/g où f et g ont été définies auparavant.

Cet exercice demande de formuler une relation entre les domaines des fonctions f et g et celui de la fonction résultat, cela requiert une compréhension abstraite de la détermination du domaine d'un quotient. Seulement trois de nos étudiants démontrent une telle compréhension.

Nous nous plaçons dans l'optique où l'**on considère ce cours comme un cours préparatoire au calcul.** Compte tenu de l'importance de la détermination du domaine et de la distinction entre les zéros et les pôles pour trouver les valeurs critiques d'une fonction, **nous suggérons d'insister sur les opérations sur les fonctions et la détermination du domaine de fonctions explicites et de fonctions résultats.**

Nous suggérons aussi de présenter aux élèves des fonctions résultats sous forme explicite et de leur demander de déterminer l'opération et les opérandes. Ce travail portera fruit dans le cours de calcul pour l'utilisation des règles de calcul de limite et des règles de dérivation.

La relative bonne performance des élèves sur la composition des fonctions nous porte à suggérer une utilisation plus importante de cette opération. En particulier, nous suggérons de **remplacer l'utilisation des règles de dérivation de $e^{g(x)}$, $\ln(g(x))$, $\cos g(x)$, etc. par celle de la règle de dérivation d'une composée**. On peut rendre ce processus plus cohérent donc plus accessible, en démontrant dans un premier temps les règles de dérivation qui fournissent directement la fonction dérivée (constante, identité, x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$). Par la suite, on démontrera les règles de dérivation des fonctions résultats des opérations ($+, -, \times, \div, \circ$). Ces règles, par opposition aux précédentes, ne fournissent pas de résultats immédiats; elles renvoient plutôt leur utilisateur à la dérivation des opérandes et fournissent la structure dans laquelle ces résultats intermédiaires doivent être combinés.

Cette façon de faire qui reprend l'idée d'**analyse syntaxique** (détermination de l'opération et des opérandes, déjà mise en oeuvre dans le codage des expressions numériques et des fonctions) **mettra en évidence une structure simple de l'algorithme de dérivation** qui facilitera son utilisation et sa mémorisation.

6.4.2 Un exercice correctif

Suite à l'observation de la confusion entre le produit et la composée, nous avons utilisé l'exercice suivant afin d'obliger les élèves à mettre en évidence les similitudes et les différences entre ces deux opérations. Cet exercice nous semble illustrer assez fidèlement une des stratégies que nous utilisons volontiers et qui consiste à utiliser des connaissances antérieures efficaces comme base de développement de connaissances nouvelles. Il nous arrive en effet fréquemment de travailler en faisant ressortir les caractéristiques communes à une situation connue et à une situation nouvelle d'une part, et d'autre part les éléments qui sont différents dans ces deux situations. Nous sentons là un danger de voir l'élève s'accrocher à la situation connue et ne pas pouvoir construire la connaissance nouvelle mais d'après Brousseau (1983) les obstacles épistémologiques, quand ils se présentent, ne peuvent pas être évités et chaque élève construira sa propre façon de surmonter l'éventuel obstacle. Nous savons aussi qu'une connaissance obstacle est résistante et nous ne nous attendons pas à régler le problème en une seule intervention. C'est pourquoi nous pensons qu'il peut être profitable d'aborder le problème non pas sous l'angle de la confrontation entre les deux connaissances mais plutôt sous celui de la restructuration. Pour faciliter cette restructuration nous essayons de guider l'élève vers la recherche de la place à accorder à son ancienne connaissance dans un réseau plus global qui contiendra la nouvelle connaissance.

Afin de clarifier cette démarche, reprenons l'exemple de la confusion déjà mentionnée entre le produit et la composée de deux fonctions et de l'exercice que nous utilisons pour en sortir. Cet exercice est d'abord présenté individuellement puis on le reprend en groupe afin de montrer qu'il est possible d'utiliser d'anciennes connaissances pour en construire de nouvelles.

Nous partons de la connaissance ancienne et dont la qualité a déjà été éprouvée: le produit de deux fonctions est représenté par la procédure

```
POUR P :X
RETOURNE PRODUIT G :X H :X
END
```

et par le diagramme de la figure 34.

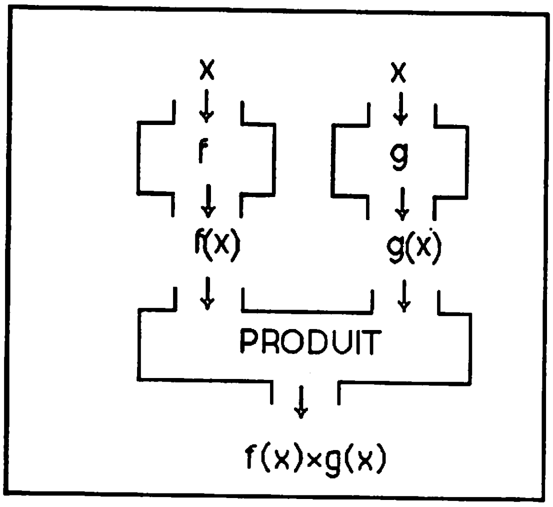


Figure 34. Diagramme de plomberie du produit de deux fonctions

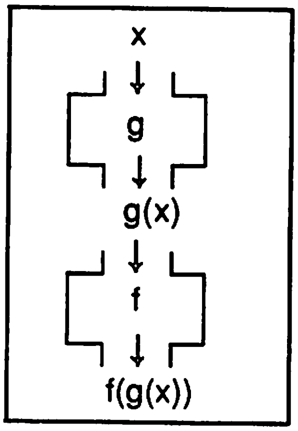


Figure 35. Diagramme de plomberie de la composée de deux fonctions

Nous voulons construire une nouvelle connaissance qui est l'écriture sous forme de procédure de la composée de deux fonctions. Cette composée correspond au diagramme de la figure 35.
Nous proposons à l'élève d'identifier dans le diagramme et la procédure qu'il connaît, chaque partie du diagramme à une partie du codage. En général, l'élève est capable de fournir la figure 36.

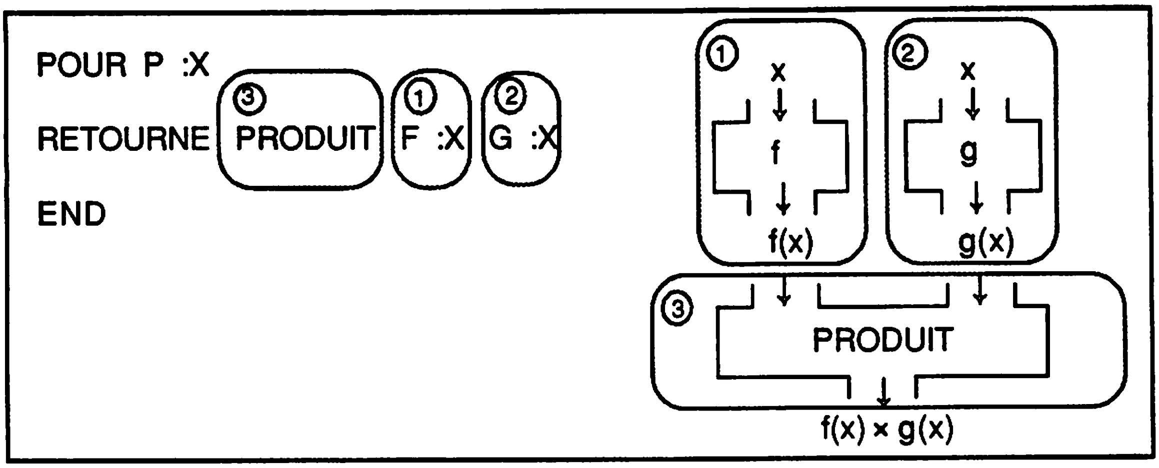


Figure 36. Comparaison entre la procédure et le diagramme de plomberie pour le produit de deux fonctions

Ensuite, nous lui demandons d'identifier les parties communes aux deux diagrammes et d'en déduire un codage partiel de la composée, puis les parties non communes.

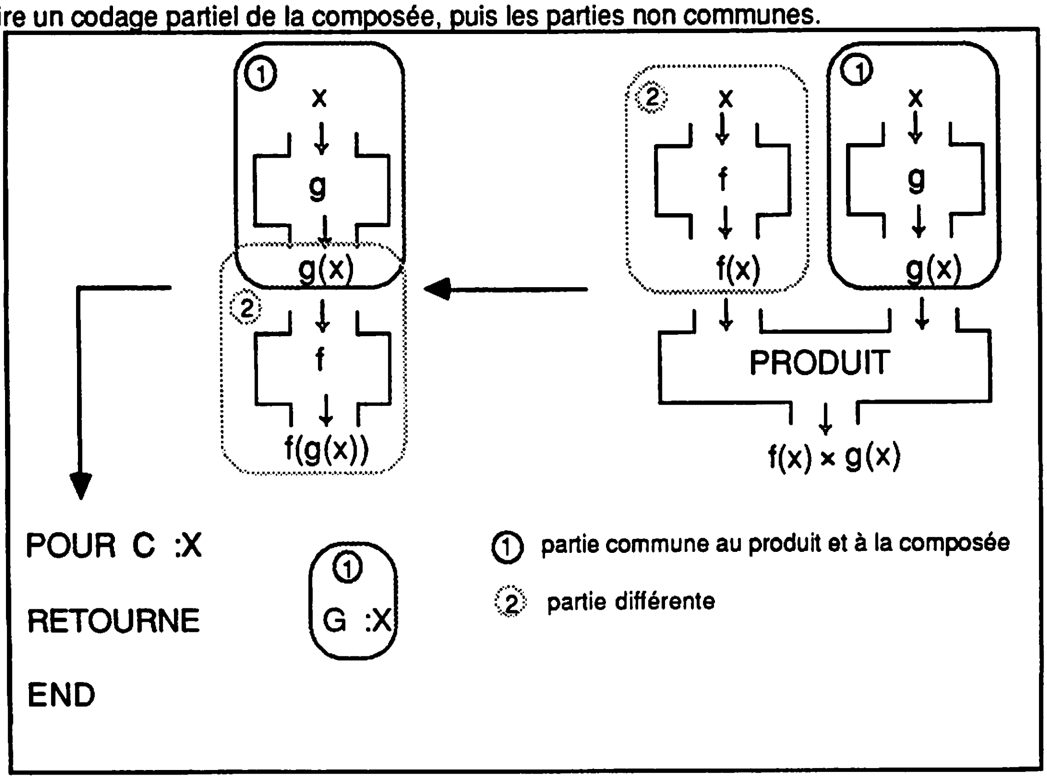


Figure 37. Identification des similitudes et des différences entre le diagramme de la composée et celui du produit de deux fonctions

Enfin, nous lui demandons d'identifier les différences entre les parties non semblables.

Il s'agit de la valeur de la variable sur laquelle la fonction f agit. Nous lui proposons alors de nous rappeler comment on fait habituellement pour spécifier la valeur sur laquelle une fonction doit agir.

En général à ce moment l'élève trouve le codage complet:

```
POUR C :X
RETOURNE F G :X
END
```

quand il ne l'a pas trouvé dès l'étape précédente.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous avons utilisé cet exercice de façon individuelle avec des élèves ayant confondu produit et composée mais aussi de façon collective, pour expliquer aux élèves ce que nous voulons dire quand nous les incitons à utiliser de vieilles connaissances combinées de façon nouvelle pour construire une nouvelle connaissance.

6.4.3 Seconde leçon-clé, les opérations sur les fonctions

Cette leçon contient la pièce du tissu conceptuel constituée d'une part de la définition des opérations (addition, soustraction, multiplication, division et composition) sur les fonctions et en particulier de la représentation de ces opérations par un diagramme de plomberie. On considère aussi l'application des notions d'image d'une valeur de la variable et de domaine aux fonctions résultats de ces opérations.

Nous avons observé les productions des élèves à ce sujet lors du premier examen et pendant la seconde entrevue. La question était alors:

Expliquer la différence entre le produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions.

Le tableau XIX présente les élèves qui ont réussi.

On constate dans ce tableau que la question de la détermination du domaine du quotient de deux fonctions sépare clairement notre groupe d'élèves en deux catégories. D'une part, Nicole, Christiane, Eliane et Carole énoncent explicitement la relation entre ce domaine, ceux des opérandes et les zéros de la fonction diviseur, et ils tentent de trouver les zéros du diviseur

	Calculer f(g(a))	Diag. de fog	Domaine de g(x)/h(x)				Domaine de goh(x)	Entrevue n°2
			domaine opérandes	énoncer règle du /	résoudre dénom=0	appliquer règle du /		
Nathalie	réussi	réussi	réussi	réussi	réussi	réussi	réussi	réussi, calcul
Chantal	réussi	réussi		réussi	réussi		réussi	réussi, exp. gén.
Hélène	réussi	réussi		réussi	réussi		réussi	réf. méca, niv. alg.
Caroline	réussi	réussi	réussi	réussi	pb. d'alg.		réussi	o. diag., * + vague
François	réussi	réussi	réussi				réussi	exp. gén. pas d'ex.
Annie		réussi	réussi				én. la règle	o difficil., * ok
Martin	réussi	réussi	réussi					o inconnue
Nadia	réussi	réussi						o inconnue
Christian		réussi					én. la règle	o inconnue

Tableau XIX Réussite des tâches ayant trait aux opérations sur les fonctions

(Carole n'y arrive pas). D'autre part, Anne, Marc, Nadine et Christophe ne tiennent pas compte des zéros du diviseur et traitent le quotient comme un produit, une différence ou une somme. Par la suite, les premiers déterminent convenablement le domaine d'une fonction composée et expliquent bien la différence entre la composée et le produit de deux fonctions, alors que les seconds, s'ils sont parfois capables d'énoncer une condition à laquelle un réel appartient au domaine de la composée, aucun ne réussit à appliquer cette règle et aucun n'explique clairement la différence entre la composée et le produit de deux fonctions. Le cas de Francis n'est pas clair.

Il nous semble qu'il y a là **un exemple de rupture**, de jeu entre les domaines conceptuels des connaissances que les élèves peuvent mettre en jeu.

Pour les fonctions, on peut calculer l'image de 2 par la fonction f(g(x)) en calculant d'abord son image par g, puis l'image de celle-ci par f (si on maîtrise le calcul arithmétique et algébrique au palier procédural, ce qui n'est pas le cas ni d'Anne ni de Christophe en algèbre). On doit aussi pouvoir représenter la composition de deux fonctions par un diagramme de plomberie et ceci sans qu'interviennent de connaissances des domaines conceptuels précédents. Ce que tous font.

Contrairement à ce qui avait été annoncé au troisième chapitre, **c'est bien en travaillant sur les foncteurs qu'on peut faire la différence entre le procédé à appliquer pour déterminer le domaine du quotient et celui du produit de deux fonctions**, puisqu'il faut faire la distinction entre ces deux opérations sur les fonctions. On peut très bien être en mesure de déterminer le domaine d'une fonction donnée explicitement comme un quotient et donc savoir probablement que la division par 0 n'a pas de résultat réel, sans toutefois être capable d'appliquer le même raisonnement à la recherche du domaine du quotient de deux fonctions (c'est le cas de Francis, Anne, Marc, Nadine et Christophe). Nous expliquons ceci par le degré de structuration élevé de la trame conceptuelle qu'exige ce type de raisonnement. Il faut avoir accès au domaine des foncteurs pour pouvoir expliquer la différence entre produit et composée de deux fonctions. Nadine et plus encore Christophe ne semblent pas avoir les connaissances arithmétiques et algébriques qui leur permettraient d'avoir accès au domaine fonctionnel quand on doit mettre en jeu de telles connaissances préalables, et encore moins au domaine des foncteurs.

Nous voyons ici aussi apparaître le phénomène que nous avons déjà mentionné des élèves qui sont **capables de dire comment faire sans être capables de faire** (Anne et Christophe pour l'image par une fonction composée d'un réel donné et pour le domaine d'une composée, Christophe et Nadine pour le domaine d'une composée donnée explicitement par une racine carrée). D'après nous, cela tient à **des liens de dépendance entre des connaissances**

des domaines conceptuels antérieurs mal maîtrisées et pour lesquelles le lien, trop ténu, n'a pas permis de provoquer un remaniement. Ici, on pourrait parler de connaissances algébriques mal maîtrisées (remplacer toutes les occurrences de x par une valeur dans une fonction, résoudre l'inéquation 5-2x>0) que les élèves n'ont pas revisitées suffisamment en profondeur. On voit apparaître ici **un des défis de taille** de l'enseignement des mathématiques, celui de **proposer des situations qui permettent de questionner un éventail assez large de connaissances antérieures, sans toutefois qu'elles perdent trop de pertinence pour ceux dont les connaissances antérieures ne posent pas de problème.**

Il semblerait qu'une remise en question des structures antérieures ne s'est pas faite pour Anne, Marc, Nadine et Christophe. Le travail que nous abordons dans les dixième et onzième laboratoires, et qui porte sur le λ-calcul, a pour but de provoquer une telle remise en question. Dans le onzième laboratoire, on fait en sorte de considérer toutes les opérations sur les fonctions sur un même pied alors que jusque là on les avait différenciées, en particulier dans le dixième laboratoire où on traite une par une les expressions de la somme, de la différence, du produit, du quotient et de la composée de deux expressions. On espère mettre ainsi en lumière qu'une opération binaire sur des fonctions est un procédé qui fait correspondre à un couple de fonctions une autre fonction et que cette autre fonction dépend de l'opération qu'on a considérée. Nous espérons que les élèves en arrivent à **considérer l'opération comme un paramètre**, et que le changement de régime, opérations différentes, opérations semblables, provoquera la précision de ces différences et de ces similitudes. En particulier, le domaine de la fonction résultat devra être déterminé différemment selon l'opération considérée. On souhaite faire remarquer que la différence entre les opérations appartient au domaine de l'algèbre par la manipulation des expressions. En mettant ainsi l'accent sur la spécificité de l'action de chaque opération sur les expressions, nous espérons remettre en question la conception fausse, qu'utilisent tous les élèves qui ne savent pas déterminer le domaine d'un quotient, que le domaine d'une fonction résultat (pour les opérations algébriques) est l'intersection des domaines des fonctions opérandes. Il est clair que nous n'avons pas cette année assez d'observations pour vérifier si cette stratégie est suffisante pour provoquer la rupture souhaitée.

6.5 Première entrevue

À la fin du mois de septembre, durant la semaine qui suivait le premier examen, nous avons rencontré les élèves individuellement pour tenter de faire le point sur la signification qu'ils donnaient au mot variable.

L'entrevue se déroulait selon six points d'intérêt. Dans un premier temps, l'élève devait donner sa définition du mot variable, puis illustrer sa définition à l'aide d'un exemple. Par la suite, nous lui demandions s'il y avait d'autres mots qu'il associait au mot variable. Enfin, nous reprenions les mêmes exercices avec le mot fonction.

En ce qui concerne la définition du mot variable, nous observons trois catégories de réponse. Il y a tout d'abord Christophe et Marc qui définissent le mot variable par le mot inconnue. Pour eux, c'est une lettre qui cache une valeur, ils la rencontrent dans une équation et doivent l'isoler pour en connaître la valeur.

Christiane, Anne et Francis considèrent que la variable est une lettre qui peut remplacer plusieurs nombres. Ils précisent qu'une variable est quelque chose qui change, qui se modifie. Nadine reprend cette idée tout en donnant la possibilité de calculer un résultat. Ces quatre élèves entrevoient la possibilité de calculer un résultat en remplaçant, dans une expression algébrique, cette lettre par une valeur. Eliane est davantage préoccupée par cette capacité de calculer un résultat et elle précise tout de suite qu'il faut tenir compte des restrictions algébriques dans les réels.

Pour Nicole et Carole, le mot variable est associé au mot fonction. Elles s'attardent au domaine de la fonction. Carole précise dès le départ qu'il existe la variable indépendante et la variable dépendante.

Les exemples apportés sont révélateurs et viennent bouleverser la première classification du niveau de réponses. Tout d'abord, Francis ne donne pas d'exemple. Marc donne une équation à deux variables et donne une valeur à une variable pour être capable de déterminer la seconde. Il tente de donner un exemple de situation concrète qui pourrait illustrer le rôle d'une variable mais il ne réussit pas à donner un exemple adéquat. Nous retrouvons le même comportement chez Christophe et Nadine. La notion est trop vague pour choisir un contexte pertinent. Ils n'élaborent pas davantage ou se perdent dans leurs explications. Par contre, Nicole, Anne et Eliane se limitent à un aspect plus opératoire et choisissent des exemples d'expressions fonctionnelles pour discuter des valeurs admissibles pour x. Même si on insiste un peu plus pour Eliane, elle apporte une situation concrète pour illustrer à nouveau l'importance d'établir les restrictions venues du contexte. Seules Carole et Christiane donnent un exemple de situations concrètes en identifiant correctement la variable indépendante et la variable dépendante. Elles associent l'idée de fonctionnalité au mot variable. Elles ne se limitent pas au contexte algébrique.

La suite de l'entrevue demeure source d'information importante et il est intéressant d'observer comment les élèves associent variable et fonction.

Pour Nadine, Anne, Francis, Marc et Eliane, une fonction est une formule. Ils accordent beaucoup d'importance à l'expression algébrique et voient peu de différence entre variable et fonction. Eliane précise à nouveau l'importance de choisir des valeurs qui permettront d'obtenir un résultat dans les réels et cette fois associe le mot domaine à cette idée.

Christophe se limite à la nomenclature rencontrée dans le cours et associée à fonction; par exemple, fonction linéaire, fonction constante etc...Pour chaque fonction, il voit un graphe où l'axe vertical est l'axe des y ou l'image.

Par ailleurs, Carole, Nicole et Christiane partent de l'idée de relation, de règle de correspondance entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Elles utilisent des représentations graphiques déjà rencontrées, le graphe sagittal ou le diagramme de plomberie. Nicole va même jusqu'à mentionner l'unicité de l'image et précise que pour chaque fonction, on peut tracer un graphe. Selon le graphe tracé, il sera possible de parler de modèle. Toutefois, il demeure difficile pour Nicole d'illustrer sa définition du mot fonction en donnant un exemple de situation concrète.

En résumé, au moment de la première entrevue, nous pouvons penser que Carole, Christiane et Nicole ont atteint une compréhension abstraite d'objets particuliers du domaine des fonctions. Si nous comparons avec la classification faite à la fin du cinquième chapitre, nous observons une nette progression de la compréhension invoquée par Carole et Christiane. À cette étape de la session nous ne pouvons rien conclure pour les autres élèves.

6.6 Cinquième laboratoire

Les tâches du cinquième laboratoire sont plus nombreuses et plus diversifiées que celles des précédents. Elles consistent à mettre en place un certain nombre de connaissances et d'habiletés qui seront approfondies et réutilisées dans les laboratoires 6, 7 et 9.

Ces tâches peuvent être classifiées en quatre catégories: rédiger une simulation d'exécution de procédure, décrire une procédure à l'aide de la notation fonctionnelle, coder différents modes de variation et utiliser les procédures pour générer des suites respectant certaines contraintes.

La rédaction d'une simulation d'exécution d'une procédure est une description analytique de la procédure par opposition à la notation fonctionnelle qui est synthétique. Dans la simulation, on s'intéresse au déroulement pas à pas de l'exécution de la procédure alors que la notation fonctionnelle décrit les entrées et les sorties de la procédure indépendamment de la manière dont le processus s'exécute.

La simulation permet de voir à quel moment et de quelle façon les variables changent de valeur et peut être utile pour régler les problèmes techniques de codage. En ce sens parmi les outils conceptuels dont disposent les élèves, c'est celui qui est le plus éloigné du domaine des mathématiques. La notation fonctionnelle, au contraire, est utilisée telle quelle en mathématiques ce qui nous amène à regarder en détail comment les élèves l'utilisent dans le contexte de la rédaction de procédures et dans le contexte de la définition d'une fonction.

Nous examinerons comment les élèves identifient les variables au premier examen, comment ils définissent une fonction et comment ils décrivent les entrées et sorties d'une procédure au deuxième examen.

> ***Premier examen groupe 4109***
> *Deuxième question*
> *Des fonctionnaires œuvrant dans le domaine de la santé publique ont déterminé qu'au cours d'un programme visant à immuniser la population contre une forme virulente de la grippe, la somme, en millions de dollars, qu'il a fallu verser pour vacciner x% de la population était d'environ*
>
> $$M(x) = \frac{150x}{200 - x}$$
>
> *a) Identifier la variable indépendante dans cet énoncé (nom, signification, et unité).*
> *b) Identifier la variable dépendante (nom, signification et unité de mesure).*

Deuxième examen groupe 4109

Première question

Un producteur maraîcher sait que pour la production de laitues il doit ajouter aux frais fixes des coûts de production proportionnels à la quantité produite. Or, il a remarqué qu'il lui coûte 240$ pour produire 700 laitues et 280$ pour en produire 900.
a) Établir la notation fonctionnelle de son coût total de production.
Cinquième question
a) La procédure ACCROITRE *est définie comme ceci:*

```
POUR ACCROITRE :X :Y :QUANTITE :EXTREMITE
SI :X > :EXTREMITE [STOP]
ECRIS PHRASE :X :Y
ACCROITRE (:X + 1) (:Y + :QUANTITE ) :QUANTITE :EXTREMITE
END
```

Décrire les entrées de la procédure ACCROITRE *en précisant pour chacune son nom, sa nature et sa signification.*

Premier examen groupe 4110
Question 2
Au moment d'imprimer des cahiers de notes de cours, on détermine le prix de vente d'un cahier en fonction du nombre de copies. Ce prix est fixé de la façon suivante:

$$P(n) = 2.30 + \frac{5n}{100}$$

a) Identifier la variable indépendante dans cet énoncé.
b) Identifier la variable dépendante.

Second examen groupe 4110
Question 1
Partie 1
Pour augmenter le nombre de jeunes familles s'installant au coeur de la ville de Sherbrooke, le conseil municipal a prévu distribuer des subventions par famille pour la rénovation d'unités d'habitation. On a déjà un certain nombre de mises en chantier prévues pour le printemps 1991, mais une étude de l'impact permet d'affirmer qu'avec une subvention de 1000$, on aurait au total 46 mises en chantier tandis que pour une subvention de 3000$ le nombre de mises en chantier grimperait à 78.
En supposant que le nombre de mises en chantier suit un modèle linéaire,
a) établir la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.
Question 5

Soit $f(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \sqrt{9 + x^2}$

a) Déterminer le domaine de f(x).
b) Déterminer le domaine de g(x).
c) Soit la procédure

```
POUR COMPOSEE :X
RETOURNE F G :X
END
```

Décrire l'entrée de la procédure en précisant son nom, sa nature et sa signification.
Préciser l'effet produit par cette procédure.
d) Quel sera le résultat de l'instruction
? COMPOSEE 0

Premier examen groupe 4111 semblable à celui du groupe 4109
Second examen : groupe 4111
Question 1
Partie 1
Un organisme de charité fait appel annuellement à la générosité du milieu. Traditionnellement certains dons sont acheminés sans sollicitation; pourtant il faut aussi recourir à une campagne de financement faisant appel au travail de bénévoles.
Dans la région administrative 05 (Estrie), la campagne de financement démarre cette semaine. La compilation des années précédentes indique qu'avec 500 bénévoles, 180 000$ ont été recueillis et que 800 bénévoles en ont recueilli 223 000$.
On suppose que le montant recueilli par chaque bénévole est constant et que les conditions demeurent inchangées jusqu'à la fin de l'année 1990.
a) Établir la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.
Question 6
Soit la procédure DIM

```
POUR DIM :Y  :BORNEINF  :SAUT
SI  :Y <  :BORNEINF [ STOP ]
ECRIS :Y
DIM :Y - :SAUT :BORNEINF :SAUT
END
```

a) Décrire chaque entrée de la procédure DIM en précisant son nom, sa nature et sa signification.

6.6.1 L'identification des variables au premier examen

Après avoir fait des exercices semblables en classe, dans le cas d'un problème simple (examen 1, question 2, gr 4110), les élèves identifient correctement les variables. Il semble qu'ils soient capables de reconnaître dans l'énoncé du problème les quantités variables, dépendante ou indépendante, et d'identifier les données numériques comme étant des valeurs de l'une ou de l'autre.

On a posé un problème plus complexe à six des neuf élèves (examen 1, question 2, gr 4109 et 4111). L'élève doit interpréter le texte pour attribuer les valeurs aux variables. Les variables sont convenablement définies mais la moitié des élèves ont de la difficulté soit à attribuer la bonne valeur (x=50/100, x=1/2 au lieu de x=50 pour exprimer le pourcentage qui correspond à la moitié de la population), soit à interpréter le résultat d'un calcul (M(x)=0,375939 millions de dollars donc 375 939,85 millions de dollars). Un problème issu du monde physique se décrit naturellement avec des variables différentes et la relation de dépendance se conçoit facilement au stade intuitif (plus on vaccine de personnes, plus ça coûte cher).

Quand l'expression de la fonction est donnée, l'élève dispose de repères d'écriture pour identifier la variable dépendante et la variable indépendante, c'est pourquoi nous pensons qu'il peut faire cet exercice en n'invoquant qu'une compréhension procédurale de l'identification des variables. Il ne devra démontrer une compréhension abstraite qu'au moment d'utiliser ces variables soit pour établir l'expression de la fonction, soit pour interpréter le texte du problème et attribuer des valeurs aux variables.

Nous avons l'occasion avec le deuxième examen de vérifier l'évolution de ces apprentissages.

6.6.2 L'identification des variables au deuxième examen

Dans un problème qui demandait d'établir les équations de deux droites, de calculer leur point d'intersection et d'interpréter sa signification, cinq de nos neuf élèves (Francis, Christophe, Nicole, Christiane et Marc) définissent les variables, établissent les deux équations, attribuent les bonnes valeurs et interprètent convenablement les résultats. Marc ne traduit pas par une équation du type $f_1(x)=f_2(x)$ la contrainte d'égalité des montants recueillis.

Eliane ne reconnaît pas au départ la variable que le problème suggère de considérer comme dépendante. Elle fait une mise en équation et attribue de façon cohérente les valeurs et sait interpréter les résultats dans ce cadre. Toutefois, quand elle change de droite, elle ne conserve pas la même variable ce qui rend les deux phénomènes incomparables. Elle ne soulève pas cette difficulté et ne compare pas les deux phénomènes. Nous pouvons nous demander si elle n'invoque qu'une compréhension abstraite du domaine de l'algèbre. Son cas n'est pas facile à interpréter.

La définition des variables, comme elle se fait au début des problèmes, ne peut manquer d'avoir une influence importante sur la suite du déroulement. Toutefois, ce n'est pas la seule habileté qui intervient. Prenons l'exemple de Carole qui, après avoir identifié convenablement les variables, fait une erreur de calcul au moment d'établir l'équation et une autre erreur dans la représentation graphique. Cette accumulation d'erreurs successives rend difficile l'analyse de sa compréhension de la définition des variables et nous amène à poser la question de la pertinence que cet apprentissage peut présenter pour elle.

La question se pose aussi pour Nadine et Anne. La première distingue variable dépendante et indépendante dans une première étape mais les inverse par la suite et perd de vue le sens de chacune. La seconde n'identifie pas la variable que le problème suggère comme étant dépendante. Contrairement à Eliane, elle est incapable de traiter le problème en conséquence.

Pour ces trois dernières élèves, il semble que l'identification des variables ne soit pas perçue comme une étape utile en début de problème.

L'identification des variables et l'établissement de l'expression des fonctions demandent une compréhension abstraite d'objets du domaine des fonctions, ce que ne démontrent pas Carole, Anne et Nadine.

La comparaison des fonctions par le calcul du point d'intersection et par l'interprétation de $f_1(x)>f_2(x)$ fait appel au domaine des opérateurs car les objets comparés sont des fonctions. Pour Küchemann (1978) et Sutherland (1989), la comparaison de deux fonctions demandant d'écrire une relation comme une égalité ou une inégalité entre deux relations (les deux fonctions) est une relation du second ordre et relève du palier formel. Nous préférons voir dans cet exercice un changement de point de vue conceptuel, plaçant le calcul du point d'intersection au palier procédural car il met en jeu une vision locale, et la comparaison de deux fonctions sur tout leur domaine au palier abstrait car elle demande de considérer chaque fonction comme un objet de façon globale.

Quatre des neuf élèves (Francis, Christophe, Nicole et Christiane) invoquent une compréhension abstraite du concept de fonction en identifiant les variables, en établissant les équations, en attribuant des valeurs aux variables et en interprétant des résultats. Par ailleurs, ils démontrent une compréhension procédurale de la comparaison de deux fonctions en reconnaissant, en posant et en résolvant une équation du type $f_1(x)=f_2(x)$. Christiane et Francis formulent une interprétation des intervalles sur lesquels $f_1(x)>f_2(x)$ ou $f_1(x)<f_2(x)$, démontrant ainsi une compréhension abstraite de la comparaison de deux fonctions.

Marc a une compréhension moins élaborée car elle ne lui permet pas de traiter la comparaison de deux fonctions, ni localement ni globalement.

6.6.3 Description des procédures à l'aide de la notation fonctionnelle

Dans le deuxième examen, on demande aux élèves de décrire les entrées et l'effet d'une procédure. Cet exercice consiste à reconnaître les liens entre les valeurs successives de x et la valeur de la borne, et celui qui existe entre les valeurs successives de y et celle de son accroissement. On doit présenter d'une part séparément le rôle des quatre entrées et d'autre part globalement la façon dont la procédure combine ces valeurs pour l'affichage.

Dans ce cas, on travaille sur le concept de variable. Les nombreuses relations à faire, les regroupements et la distinction implicite entre variable et constante font appel à une compréhension abstraite de ce concept.

On observe chez Francis, Christiane et Nicole ce degré de compréhension. En effet, ces trois élèves réussissent cet exercice et utilisent convenablement le formalisme, ne tenant toutefois pas compte des détails techniques quant à l'affichage. On retrouve ce comportement chez tous les élèves et on peut y voir le fidèle reflet d'une attitude des enseignantes.

Carole comprend la signification des variables et l'effet produit par la procédure mais ne maîtrise pas les conventions d'écriture. Anne et Marc comprennent de façon globale l'effet produit par la procédure. Marc ne décrit pas les entrées et Anne utilise pour la description un formalisme dont on peut penser qu'elle ne comprend pas le sens puisqu'elle a évacué de ce formalisme la description de la signification des variables. Il est remarquable qu'Anne refuse aussi de décrire les variables quand elle doit établir l'expression d'une fonction. Marc et Anne ont une compréhension intuitive du phénomène et même une compréhension procédurale puisqu'ils sont capables de quantifier les changements de valeur des variables.

Nadine ne reconnaît pas toutes les entrées, elle cite le premier couple affiché et la dernière valeur de x. Elle ne démontre pas de compréhension procédurale du concept de variable dans cet exercice.

Compte tenu des réponses incomplètes de Christophe et d'Eliane, nous ne pouvons rien conclure en ce qui concerne leur compréhension dans cet exercice.

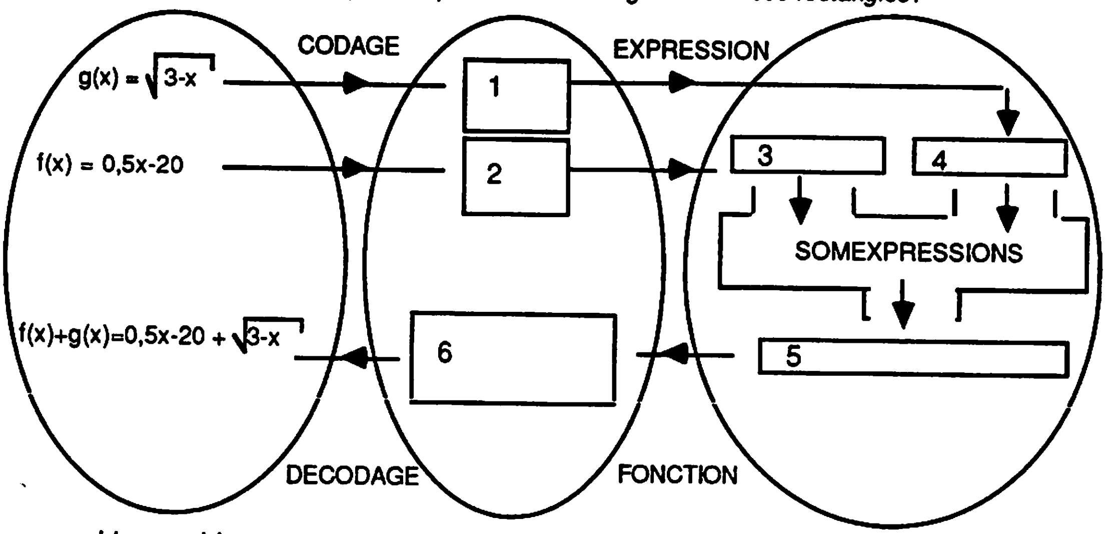
Ceci nous incite à aller vérifier dans les laboratoires subséquents la description que les élèves donnent des entrées et du résultat des procédures. Dans le sixième laboratoire, les procédures utilisées ont des entrées trop semblables à celles que nous venons d'analyser. Par contre, au neuvième laboratoire, on introduit un nouveau type d'entrée, les mots, pour représenter les noms des fonctions considérées et au dixième laboratoire on introduit les listes pour représenter les expressions des fonctions. Nous voulons vérifier si le fait de manipuler d'autres objets que des nombres, donne un sens à la notation fonctionnelle des procédures et justifie la nécessité de préciser la nature de chaque objet sur lequel on travaille.

En examinant la façon dont quatre élèves (Christiane, Anne, Nadine et Francis) décrivent la procédure DIFFERENCEEXPRESSIONS dans leur cahier de laboratoire (laboratoire 10), on observe qu'ils utilisent une formulation très semblable à celle qui est formulée en exemple pour SOMMEEXPRESSIONS. Pour vérifier si cette écriture correspond à une compréhension abstraite ou s'il s'agit d'un simple mimétisme, nous examinons les réponses à une question du dernier examen.

<u>*Sixième question*</u>

Sur la figure de la page ci-contre, 6 rectangles numérotés de 1 à 6, représentent des procédures ou des expressions servant d'entrée ou de sortie aux procédures EXPRESSION, SOMMEEXPRESSIONS et FONCTION.

Quelle procédure ou quelle expression devrait figurer dans ces rectangles?



Christiane et Nadine donnent convenablement les entrées et les sorties, démontrant ainsi que l'écriture qu'elles utilisent au laboratoire 10 a un sens. Elles ont donc une compréhension abstraite de la notation fonctionnelle, indépendamment de la nature des objets utilisés (nombres, expressions ou fonctions). Par contre, Anne et Francis ne peuvent décrire qu'une partie du processus, celle qui traite du travail sur les expressions. Ils démontrent une compréhension abstraite de la notation fonctionnelle quand ils travaillent dans ce cadre, mais cette compréhension n'a pas la stabilité suffisante pour supporter un changement du domaine de travail. En particulier, on peut douter qu'ils soient capables de travailler sur les fonctions.

Le doute que nous venons d'exprimer à propos de Francis et d'Anne devient une certitude dans le cas de Marc. En effet, à une question du dernier examen qui lui demandait de décrire le résultat des procédures SOMMEEXPRESSIONS et SOMMEFONCTIONS, il exprime l'idée que la somme de deux fonctions, comme celle de deux expressions, est un nombre. Nous avons déjà rencontré cette idée chez nos élèves du cours de calcul. Rares sont les occasions de s'y attarder et nous nous interrogeons sur l'influence qu'a cette idée sur la façon dont les élèves se structurent un algorithme de dérivation. Peuvent-ils se tenir un raisonnement du genre de celui-ci:

> *J'ai une fonction à dériver et elle est elle-même la somme de deux fonctions. Je vais aller dériver séparément chacune des deux fonctions additionnées et quand j'aurai obtenu ces résultats partiels je reviendrai les additionner.*

Nicole, Carole et Eliane abordent quant à elles le cours de calcul en sachant que la somme de deux fonctions est une fonction, résultat qu'elles expriment en expliquant que la procédure SOMMEFONCTIONS additionne deux procédures pour créer une nouvelle procédure

De plus, Nicole et Carole maîtrisent la notation fonctionnelle pour décrire une procédure qui peut agir sur des expressions ou des fonctions. Bien que l'exercice qui nous a permis d'analyser leur compréhension soit différent de celui proposé à Christiane et Nadine, nous pensons qu'elles ont invoqué une compréhension semblable à propos de la notation fonctionnelle, c'est-à-dire abstraite et indépendante de la nature des objets utilisés.

Nous avons hésité à classer la compréhension demandée minimalement pour réussir ces activités comme étant abstraite ou formelle. En effet, la représentation demandée fait appel à un système de notation formel. Toutefois, le fait que l'élève dispose d'un modèle qu'il peut imiter, n'incite pas à la prise en charge par l'élève de la construction du système de représentation. C'est pourquoi nous avons opté pour une compréhension abstraite.

Quant à Christophe, il continue à s'en tenir à exprimer de vagues idées sur la question. Il démontre une fois de plus un manque de motivation qui rend ses productions difficilement analysables.

Dans la conception de notre séquence didactique, la notation fonctionnelle pour les procédures joue un rôle important. Nous nous sommes inspirées des textes de Brian Harvey (1985) qui recommande une méthode de travail, dans le cadre de la programmation fonctionnelle. Dans un premier temps, pour chaque procédure, il suggère de préciser si c'est une commande qui produit donc un effet, ou une opération auquel cas elle fournit un résultat. Dans un deuxième temps, il recommande d'expliciter le nombre et la nature (nombre, mot ou liste) des entrées et la description précise de l'effet produit ou du résultat fourni, selon le cas. Nous avons adapté cette idée pour définir la notation fonctionnelle des procédures (voir les exemples à la section 4.5.2). Les préoccupations de Harvey sont de l'ordre de la méthodologie des différents styles de programmation. Une des idées sous-jacentes importantes est de pouvoir négliger la façon dont la procédure est écrite et de considérer qu'elle est parfaitement définie quand on connaît ses entrées et sorties. Cette idée est caractéristique de la programmation fonctionnelle. Elle a son pendant dans l'univers mathématique des fonctions. En effet, deux fonctions sont considérées égales si pour toute valeur de la variable, elles donnent des images égales, indépendamment de la façon dont ces images sont obtenues. La notation fonctionnelle pour une procédure n'est pas une idée extérieure aux mathématiques, toutefois il nous semble qu'il y aurait moyen de l'adapter davantage, pour qu'elle permette une représentation plus fidèle des sous-concepts et concepts avec lesquels on travaille. Dans le cadre de la programmation en Logo, on travaille avec des objets qui sont des nombres, représentés par des chaînes de chiffres; des mots, représentés par des chaînes de caractères précédés par des guillemets "; ou des listes représentées par une suite d'objets Logo (nombres, mots ou listes) séparés par des espaces et encadrée par des crochets carrés [ ]. Cette variété de représentations explique la nécessité de spécifier la nature de l'objet représenté par chaque entrée de procédure.

Ancienne notation	Notation proposée
POUR G1 :X *RETOURNE RAC DIFFERENCE 3 :X* *END* *Entrée:* *nom: X* *nature : un nombre quelconque* *signification : valeur de la variable x dans* $g_1(x) = \sqrt{3 - x}$. *Résultat:* *nom: G1 :X* *nature : un nombre* *signification: valeur de* $g_1(x)$ *correspondant à la valeur de x donnée en entrée, on dit aussi image de x par la fonction* g_1.	*POUR G1 :X* *RETOURNE RAC DIFFERENCE 3 :X* *END* *Entrée:* *nom: X* *signification : valeur de la variable x dans* $g_1(x) = \sqrt{3 - x}$. *domaine : ensemble des nombres inférieurs ou égaux à 3* *Résultat:* *nom: G1 :X* *signification: valeur de* $g_1(x)$ *correspondant à la valeur de x donnée en entrée, on dit aussi image de x par la fonction* g_1. *image??: ensemble des nombres positifs ou nuls.*
POUR H1 :X *RETOURNE QUOTIENT 15 DIFFERENCE P :X 2 4* *END* *Entrée:* *nom: X* *nature : un nombre quelconque* *signification : valeur de la variable x dans* $h_1(x) = 15 / (x^2 - 4)$. *Résultat:* *nom: H1 :X* *nature : un nombre* *signification: valeur de* $h_1(x)$ *correspondant à la valeur de x donnée en entrée, on dit aussi image de x par la fonction* h_1.	*POUR H1 :X* *RETOURNE QUOTIENT 15 DIFFERENCE P :X 2 4* *END* *Entrée:* *nom: X* *signification : valeur de la variable x dans* $h_1(x) = 15 / (x^2 - 4)$. *domaine : l'ensemble des nombres différents de 2 et de -2* *Résultat:* *nom: H1 :X* *signification: valeur de* $h_1(x)$ *correspondant à la valeur de x donnée en entrée, on dit aussi image de x par la fonction* h_1. *image??: ensemble des nombres strictement positifs ou inférieurs ou égaux à -15/4.*

En mathématique, on a des préoccupations semblables quand on détermine la nature des opérandes d'un opérateur ou le domaine d'une fonction. Nous nous proposons donc d'utiliser pour les entrées et le résultat, une description en trois parties: nom, signification et domaine.

Le premier avantage que nous escomptons, est de faire percevoir aux élèves l'utilité de cette partie de la description dès les premières utilisations. En effet, ils auront un domaine différent à décrire pour chaque fonction ce qui n'était pas le cas dans l'ancienne notation. On demandait de décrire la nature des entrées des fonctions, or toutes étaient des nombres. L'uniformité de cette formulation lui faisait perdre tout caractère informatif. Nous avons conscience du problème que cela pose pour la description de la nature des résultats. Doit-on parler d'image, puisque c'est de cela qu'il s'agit, même si les élèves n'ont en général pas les moyens de déterminer avec précision cet ensemble, ou doit-on adopter un vocabulaire dont la rigueur serait plus en accord avec les capacités des élèves (comme nature de la variable g(x) par exemple)? Nous n'avons pas de réponse à cette question et attendons toute suggestion à ce sujet.

Nous envisageons de profiter de cette occasion pour faire la différence entre variable et paramètre (constant). Par ailleurs, il nous semble très utile d'avoir un autre moyen de distinguer l'opérateur SOMME, qui additionne des nombres, de l'opérateur SOMMEEXPRESSIONS, qui additionne des expressions, et de l'opérateur SOMMEFONCTIONS, qui additionne des fonctions.

6.7 Sixième laboratoire

Les tâches du sixième laboratoire sont centrées sur la comparaison des modèles linéaire et exponentiel. Si dans le cinquième laboratoire, on travaillait beaucoup la forme et moins le fond (simulation d'exécution et notation fonctionnelle) au contraire, ici on renoue avec le fond. En effet, il s'agit de mesurer la vitesse de croissance de suites arithmétiques et géométriques. Pour y arriver, on introduit une variable similaire au temps dont le rôle est de compter les étapes. Les suites arithmétiques sont considérées comme des fonctions linéaires de ce temps alors que les suites géométriques en sont des fonctions exponentielles.

À partir d'un énoncé issu du monde physique, l'élève doit reconnaître si les valeurs de la fonction forment une suite arithmétique, auquel cas elles augmentent d'une constante, ou si elles forment une suite géométrique, auquel cas elles sont multipliées par une constante. L'élève reconnaîtra la pente ou la base dans ces constantes et l'ordonnée à l'origine dans le premier terme de la suite. Avec ces deux paramètres, il pourra obtenir l'expression de la fonction.

Nous examinerons comment les élèves font cet exercice dans la première question du deuxième examen, qui consiste à établir une fonction linéaire à partir d'un énoncé issu du monde physique dans lequel les données correspondent à deux points.

Second examen : groupe 4109
Première question
Un producteur maraîcher sait que pour la production de laitues il doit ajouter aux frais fixes des coûts de production proportionnels à la quantité produite. Or, il a remarqué qu'il lui coûte 240$ pour produire 700 laitues et 280$ pour en produire 900.
a) Établir la notation fonctionnelle de son coût total de production.

Second examen : groupe 4110
Question 1
Partie 1
Pour augmenter le nombre de jeunes familles s'installant au coeur de la ville de Sherbrooke, le conseil municipal a prévu distribuer des subventions par famille pour la rénovation d'unités d'habitation. On a déjà un certain nombre de mises en chantier prévues pour le printemps 1991, mais une étude de l'impact permet d'affirmer qu'avec une subvention de 1000$, on aurait au total 46 mises en chantier tandis que pour une subvention de 3000$ le nombre de mises en chantier grimperait à 78.
En supposant que le nombre de mises en chantier suit un modèle linéaire,
a) établir la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.

Second examen : groupe 4111
Question1
Partie 1
Un organisme de charité fait appel annuellement à la générosité du milieu. Traditionnellement certains dons sont acheminés sans sollicitation; pourtant il faut aussi recourir à une campagne de financement faisant appel au travail de bénévoles.
Dans la région administrative 05 (Estrie), la campagne de financement démarre cette semaine. La compilation des années précédentes indique qu'avec 500 bénévoles, 180 000$ ont été recueillis et que 800 bénévoles en ont recueilli 223 000$.
On suppose que le montant recueilli par chaque bénévole est constant et que les conditions demeurent inchangées jusqu'à la fin de l'année 1990.
a) Etablir la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.

6.7.1 Reconnaissance du modèle linéaire

Tous les élèves reconnaissent que le phénomène décrit suit un modèle linéaire. La difficulté qui empêche certains de résoudre le problème en entier est d'associer convenablement les données numériques et les variables. Eliane intervertit les variables et utilise les données en conséquence par la suite. Nadine définit les bonnes variables, mais utilisent les couples de données à l'envers.

Quant à Anne, elle calcule la pente dans le système (coût, production) et l'utilise pour calculer l'ordonnée à l'origine dans le système (production, coût).

Les six autres identifient convenablement les variables, leur associent les bons couples, reconnaissent le modèle linéaire, calculent la pente et l'ordonnée à l'origine. Nous pouvons dire qu'ils semblent avoir atteint une compréhension abstraite d'objets du domaine des fonctions. Seule Carole fait une erreur de calcul même si comme les autres, elle est capable de calculer la valeur de la variable connaissant celle de la fonction et réciproquement.

6.7.2 Reconnaissance du modèle exponentiel

Dans le même examen, la deuxième question traitait de façon semblable un modèle exponentiel. Tous sauf Francis reconnaissent le modèle exponentiel. Francis traite le problème avec un modèle linéaire dont la pente est l'augmentation entre 0 et 1. C'est un fait que nous voulons profiter de la bonne connaissance que les élèves ont de la fonction linéaire pour introduire la fonction exponentielle par analogie. Francis serait-il empêché de traiter l'exponentielle par sa bonne connaissance de la fonction linéaire? Il fait peut-être une erreur d'interprétation qui serait provoquée par le souvenir d'un exercice similaire présenté en classe.

> *Paul a une collection de livres dont une partie valait 5000$ en 1975 et augmente chaque année de 10% de sa valeur initiale (1000$). Décrire ce phénomène à l'aide de la notation fonctionnelle.*

Francis est tout de suite parti avec l'idée d'une augmentation constante. C'est le modèle le plus simple d'explication des phénomènes avec dépendance, avec la première idée de fonction. Lorsqu'il reconnaît le modèle, comme à la troisième entrevue, il est capable de traiter toutes les questions avec le bon raisonnement.

En ce qui concerne la reconnaissance du modèle, tenant compte de toutes les remarques mentionnées au sujet de Francis, il nous semble que tous ont atteint une compréhension abstraite d'objets du domaine des fonctions.

6.7.3 Reconnaissance des paramètres dans une équation

Tous sauf Marc identifient convenablement l'ordonnée à l'origine. Marc en change selon les calculs.(figure 38)

C'est le calcul de la base qui semble poser le plus de difficultés. Christiane ne la reconnaît pas, Nadine prend un nombre 100 fois trop grand. Marc change, là encore, selon les calculs. Christophe prend la bonne base mais même s'il maîtrise l'expression algébrique du modèle, il donne une droite pour représenter l'allure du graphe.

Le total des soldes impayés pour les détenteurs de carte de crédit augmente de 12% par année. On notait au Canada un total de 2,4 milliards de dollars en 1979.

a) Utiliser la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.

variable indépendante x = nombre d'années écoulées

Aug 12% par année. $C(x) = A.b^x$ — $C(x)$ = soldes impayé en $ variable dépendante.

2,4 milliard en 1979 — $C(0) = 2{,}4$ milliard.

$C(x) = x \times 2{,}4^{0{,}12}$

$\boxed{C(x) = x\,2{,}4^{0{,}12}}$

b) A combien s'élevait le total des soldes impayés en 1989?

$C(x) = 2{,}4 \text{ million} \times 0{,}12^x$

80 = 2,688
81 = 3,01056
82 = 3,3718272
83 = 3,7764
84 = 4,2296
85 = 4,7371745
86 = 5,30563
87 = 5,94
88 = 6,665
89 =

Les soldes impayé s'élevait à $\boxed{7{,}4 \text{ milliards de dollars}}$

Figure 38. Marc: reconnaissance des paramètres dans une mise en équation

Nicole, Carole et Eliane maîtrisent les deux aspects ce qui nous poussent à prétendre qu'elles démontrent une compréhension abstraite de ce modèle fonctionnel.

Dans le cas d'Anne, nos exigences de définir les variables présentent l'intérêt de l'obliger à expliciter des idées qui auraient pu sans cela passer inaperçues.(figure 39)

Anne nous laisse l'impression d'avoir accumulé au fil des années la connaissance d'un certain nombre de résultats. Toutefois, il est difficile de déceler dans son travail la nature de sa conception du problème. Dans la plupart des cas, la conception que se fait l'élève du problème apparaît lorsqu'il évoque de façon répétitive et stable un certain nombre de connaissances qu'il modifie petit à petit. Or, Anne prend pour f(x) une des valeurs de la fonction donc une constante. Au moment de définir la variable indépendante, elle utilise une formulation rencontrée en classe dans l'étude de certains problèmes décrits par un modèle quadratique. Dans l'expression de la fonction, si elle met bien la variable en exposant elle n'utilise pas la base convenablement. De plus, elle modifie l'expression de la fonction au moment des calculs. Elle obtient des résultats aberrants mais n'en parle pas, bien que l'enseignante ait signalé que des points seraient attribués pour ceux qui le feraient. Elle invoque plusieurs connaissances éparses mais nous n'arrivons pas à y voir un fil conducteur, une connaissance solide qui servirait de base à sa recherche d'une solution. Comme notre méthode d'enseignement part de la conception initiale de chaque élève, tente de l'améliorer et de la compléter, dans le cas d'Anne, cette méthode est plus difficile à appliquer.

Le Conseil canadien des ingénieurs professionnels fait savoir qu'il y a actuellement 108 000 ingénieurs pratiquants au Canada et que la demande augmente de 3,8% chaque année.

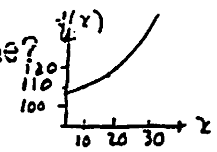
a) Utiliser une notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.

soit x : le nombre d'augmentations de 3,8%
$f(x)$ = le nombre actuel d'ingénieur
$f(x) = Ab^x$
$f(x) = 108000^{3.8/x}$

b) De combien d'ingénieurs aura-t-on besoin en l'an 2000 au Canada?

$f(10) = 108000^{3.8/10}$ $\qquad$ $2000 - 1990 = 10$
$f(10) = 81,79$
$108000 + 81,79 = 108082$ ingénieurs.

c) Dessiner l'allure du graphe représentant ce phénomène?



d) Quel est le domaine de cette fonction?

$[0, +\infty$

Figure 39. Anne: reconnaissance des paramètres dans une mise en équation

Le comportement d'Anne ne nous semble pas un cas isolé. Nous rencontrons dans nos classes plusieurs élèves ayant ainsi mémorisé un bon nombre de faits mais étant démunis devant un raisonnement à mener jusqu'au bout. Bien que ne sachant pas dans le détail comment l'évaluation est faite au secondaire, force nous est de constater que ces élèves sont en mesure de réussir les examens du secondaire et d'arriver dans nos classes. On peut même penser que certains obtiendront un diplôme d'études collégiales à force de se voir attribuer un point ici et là pour avoir écrit quelques règles ayant rapport avec le sujet. Nous sommes mal à l'aise avec cette constatation ayant nous-mêmes participé à ce genre d'évaluation. Il est pertinent de nous questionner à deux niveaux sur le type d'évaluation que nous avons adopté. Les élèves qui ressemblent à Anne sont-ils désavantagés par des examens où l'on demande d'écrire des solutions complètes et de faire des raisonnements? Sommes-nous justifiées de laisser réussir des cours de mathématiques par des élèves incapables d'exprimer par écrit les raisonnements qui mènent aux solutions des problèmes posés?

Il est clair que chaque enseignant dose ses exigences et se trouve un équilibre en cette matière. Toutefois, il nous semble que plusieurs élèves seraient en mesure de mener des raisonnements beaucoup plus élaborés que ce qu'ils font, s'ils étaient régulièrement obligés de démontrer cohérence et précision.

Dans le cas d'Anne, les comptes-rendus d'entrevues (annexe nº6) reflètent à nouveau la connaissance d'une grande variété de faits peu structurés. Elle sait que l'ordonnée à l'origine est f(0) et correspond à la valeur initiale, que la base se calcule par le quotient de f(1) par f(0). Cela lui permet d'établir une expression de f(x). Toutefois, au moment d'un calcul, elle change d'expression et revient à une méthode qui a permis au départ de justifier l'établissement de l'expression d'une exponentielle. Or, si elle utilise la bonne idée de départ, elle n'arrive pas à compléter le calcul. Il lui est impossible de passer à une étape d'algorithmisation d'un processus n'ayant pas maîtrisé le raisonnement et la notation qui y mènent. Elle n'arrive pas à utiliser la notation fonctionnelle $f(x) = 1000\ (49/50)^x$ qu'elle a elle-même établie pour vérifier si le couple (10,817) appartient à la fonction. Elle remplace x par 817 dans f(x) et par 10 dans l'expression $(49/50)^x$ (figure 40)

> *Le couple (10, 817) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert?*
>
> *$f(817)=1000*(49/50)^{10}$ · Bien, si ce calcul donne 817, ce serait le nombre d'opérations.*

Figure 40. Anne: notation fonctionnelle

6.7.4 Comparaison de deux fonctions dans un contexte issu du monde physique

Le point culminant du travail de modélisation qui est abordé dans les cinquième et sixième laboratoires, est l'exercice suivant:

Chercher dans les journaux de la semaine un phénomène mesurable, qui dépend d'une variable, elle même mesurable, et pour lequel on connaisse deux des valeurs qu'il prend ainsi que les valeurs correspondantes de la variable. Faites une étude comparant le comportement de ce phénomène avec l'hypothèse d'un modèle linéaire et avec l'hypothèse d'un modèle exponentiel.

Cet exercice est réussi de façon inégale par les élèves qui ne trouvent pas tous des exemples pertinents. Or, il nous semble qu'un élève qui aurait bien compris la comparaison des deux modèles dans un contexte issu du monde physique, aurait à sa disposition un bon point d'ancrage pour la réutilisation future de ces modèles. C'est pourquoi nous suggérons de donner de l'ampleur à ce travail en fournissant aux élèves un cadre de travail plus précis.

Nous comptons centrer le travail de l'année 1991-1992 autour de la modélisation. Nous nous proposons dans ce cadre de retravailler cette situation didactique et d'étendre à d'autres situations ce schéma de travail.

6.8 Seconde entrevue

Lors de la deuxième entrevue, nous voulions toucher à plusieurs sujets. Tout d'abord, nous voulions revenir sur la définition de fonction. Puis, nous voulions profiter de l'exercice de la recherche d'une fonction à partir de la lecture du journal pour observer comment les élèves abordaient un tel exercice. Enfin, nous voulions leur donner l'occasion de nous expliquer la différence entre le produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions.

Le simple exercice de choisir la meilleure définition de fonction parmi trois demeure révélateur. En effet, nous remarquons qu'Eliane et Marc n'ont pas modifié leur conception. Ils choisissent la définition qui correspond le mieux à l'idée de calcul c'est-à-dire celle où l'on parle des opérations mathématiques. Christophe et Nadine vont un peu plus loin en accrochant à l'idée de la représentation graphique mais leur choix demeure conforme à ce qu'ils avaient énoncé la première fois. Par contre, Francis justifie son choix pour la troisième définition en donnant beaucoup d'importance au mot relation ce qui n'était pas ressorti lors de la première entrevue. Pour Anne, la justification du choix est plus vague. Elle fait ressortir l'idée d'associer y à x sans souligner l'importance de l'unicité de l'image, ce que font Carole et Nicole. Dans le cas de Christiane, l'idée de relation est importante et elle ne la retrouve pas dans la troisième définition.

Cette fois-ci, les commentaires de Francis font appel à une compréhension plus abstraite. Nous pensons qu'il a dépassé le palier de compréhension invoqué lors de la première entrevue. Pour les autres élèves, nous observons qu'ils invoquent des paliers très semblables à ceux invoqués la première fois. Bien entendu, le choix d'une définition est très général, nous nous basons surtout sur le type de justification.

L'exercice de déterminer une fonction à partir d'un contexte rencontré dans un article de journal nous a semblé suffisamment riche pour alimenter nos travaux pour l'an prochain. Nous ne pouvons pas tirer toute l'information cette fois-ci. Nous nous contenterons d'observer la répartition des interventions de nos neuf élèves.

Il y en a huit qui commencent en précisant que la variation du temps est un indice important pour choisir un article. Seul Marc a choisi une situation qui ne fait pas intervenir le temps comme variable indépendante. Toutefois, il se contente de deux couples sans chercher davantage à reconnaître un modèle fonctionnel.

Ainsi, les situations concrètes faisant intervenir le temps comme variable indépendante semblent très naturelles. Eliane, Nadine, Anne et Christophe se contentent même de cette seule caractéristique pour nous expliquer comment choisir un article. Francis, Nicole, Carole et Christiane vont donner une explication plus élaborée et insister sur l'idée de relation entre deux variables. Nous remarquons que ce sont les mêmes élèves qui semblaient invoquer une compréhension abstraite pour les autres exercices.

La troisième question était beaucoup plus technique. Pourtant, Nadine, Marc et Christophe n'ont aucune idée lorsque nous leur demandons d'expliquer comment nous obtenons la fonction composée. Pour eux, cette nouvelle opération sur les fonctions n'a pas été comprise. Nous serions tentés d'affirmer que ces trois élèves n'ont pas encore atteint le domaine des fonctions. Les six autres élèves font bien la différence entre le produit et la composition de deux fonctions. Eliane s'en tient encore à l'aspect calcul pour l'expliquer tandis que les autres parlent des images obtenues. Nicole et Carole apportent même les diagrammes pour illustrer leur propos.

6.9 Troisième leçon-clé, la comparaison des modèles linéaire et exponentiel

Cette leçon contient la pièce du tissu conceptuel constituée des fonctions linéaires et exponentielles utilisées dans le cadre de la modélisation de situations issues du monde physique, c'est-à-dire en liaison étroite avec les concepts de variable indépendante et de fonction.

Le tableau XX permet de comparer les performances des élèves à l'exercice de modélisation avec leurs performances à des exercices concernant la composition (examen 1, entrevues 1 et 2 et questionnaire variable-fonction), la conception des variables (examens 2 et 4, lab 10 et 11) et celle des fonctions (examen 1, entrevues 1 et 2). Dans la colonne intitulée "composition", on retrouve un nombre de a (abstraite) et de p (procédurale) correspondant à la compréhension invoquée pour répondre à six questions portant sur la composition de deux fonctions (voir section Composition des tableaux XXI à XXIX). Seules les questions réussies figurent dans ce tableau. Suivant le même principe, dans la colonne intitulée "procédures", on retrouve un nombre de i (intuitive) et de p (procédurale) correspondant à la réussite de deux exercices de représentation d'une fonction par une procédure. De la même façon, dans la colonne intitulée "variables", on retrouve un nombre de a (abstraite) correspondant à la réussite de l'utilisation de la notation fonctionnelle.

	Composition	Procédures	Variables	Modélisation	
				linéaire	exponentiel
Christiane	aaaapp	ip	aaaa	réussi	réussi
Nicole	aaappp	ip	aaa	réussi	réussi
Francis	aaap	ip	aa	réussi	réussi
Carole	appp	i	aa	partiellement	réussi
Eliane	aap	ip		partiellement	réussi
Christophe	aap	i	a	réussi	
Marc	pp		a	réussi	
Anne	ap				
Nadine	pp		a		

a= abstrait; p= procédural; i=intuitif.

Tableau XX. Comparaison des modèles linéaire et exponentiel et compréhension des concepts de variable et de fonction

On constate dans le tableau XX que plusieurs de ces connaissances séparent le groupe d'élèves en trois sous-groupes distincts. D'une part, Christiane, Nicole et Francis invoquent régulièrement des connaissances abstraites sur la composition et les variables, réussissent des exercices sur les procédures et semblent maîtriser la modélisation d'une situation issue du monde physique, aussi bien lorsqu'elle suit un modèle linéaire que lorsqu'elle suit un modèle exponentiel. D'autre part, Carole et Eliane réussissent moins régulièrement les exercices ayant trait à la composition des fonctions, maîtrisent moins bien les procédures, et ne sont pas capables de décrire les entrées d'une procédure. Quand on leur propose un exercice de modélisation, elles sont plus à l'aise avec le modèle exponentiel qu'avec le modèle linéaire. Enfin, Christophe, Marc, Anne et Nadine réussissent peu d'exercices sur la composition, ne maîtrisent ni les variables ni les procédures et ne reconnaissent au mieux que le modèle linéaire.

L'hypothèse que nous faisons ici est que pour reconnaître un modèle exponentiel il faut avoir distingué que les quantités variables ne jouent pas des rôles symétriques, alors que ce n'est pas nécessaire pour reconnaître un modèle linéaire, puisqu'en intervertissant les deux variables on a encore un modèle linéaire. Cette particularité du modèle exponentiel, une fois qu'on l'a perçue, en fait un modèle dont les éléments (variable indépendante, variable dépendante, image, ordonnée à l'origine, base) sont mieux déterminés et plus facilement déterminables. C'est ce qui explique que certains le maîtrisent mieux que le modèle linéaire. Pour les élèves qui n'ont pas fait cette distinction, le modèle linéaire peut rester le modèle par défaut, non pas au sens où ce serait celui qui s'applique quand on a essayé tous les autres, mais bien à défaut d'en connaître d'autres. Il nous semble que le fait de **proposer le modèle exponentiel comme première alternative** est une bonne suggestion, à cause de la **facilité de comparaison entre les deux modèles et de l'analogie possible entre la pente de l'un et la base de l'autre**. L'expérience de cette année nous montre que, si plusieurs élèves abordent avec une certaine aisance le modèle linéaire, c'est la présentation presque simultanée du modèle exponentiel qui privilégie la réflexion indispensable à l'abstraction sur le rôle respectif des variables et sur celui des paramètres. Dans ce sens, le changement de registre que l'on fait subir aux fonctions linéaires et exponentielles à l'occasion des exercices de modélisation, **passant du registre de connaissance objet d'apprentissage à celui de connaissance outil de modélisation**, nous paraît faire se développer simultanément les concepts de variable et de fonction. C'est une piste que nous nous proposons d'exploiter plus à l'avenir et d'étendre à d'autres objets du cours.

6.10 Septième laboratoire

Comme dans toute situation d'enseignement, nous n'avons pas été à l'abri des imprévus. Au moment de travailler le septième laboratoire, les circonstances ont fait que nous n'avons pu recueillir des travaux d'élèves nous permettant cette analyse.

Toutefois, la question de la généralisation à la tabulation de toute fonction nous paraît particulièrement pertinente, elle est reprise au neuvième laboratoire. Elle permet de travailler sur le concept de variable et d'expliciter les différents niveaux conceptuels sur lesquels on demande aux élèves de travailler.

Le fait que quelques élèves par classe (3 ou 4) pensent à représenter les fonctions par une variable nous incite à chercher un moyen de guider la majorité vers cette idée.

Nous voudrions consigner ici une remarque qui nous paraît importante dans la mesure où elle nous incitera à nuancer nos prévisions. Au laboratoire 7, nous avions prévu demander aux élèves de concevoir une procédure qui tabulerait toute fonction dont on connaît l'expression au lieu de n'en tabuler qu'une seule. Nous pensions ainsi "obliger" en quelque sorte les élèves à concevoir l'ensemble des fonctions dont on connaît l'expression comme le domaine d'une variable dont les valeurs possibles seraient des fonctions. Nous avions conscience de l'importance de ce saut conceptuel à la fois par sa difficulté et par sa puissance par exemple pour aider à comprendre des énoncés de condition du genre de "Soit f une fonction dérivable...". Mais nous avions sous-estimé la capacité des élèves à combler un tel saut conceptuel par des connaissances antérieures insuffisamment aménagées. Plusieurs de nos élèves nous ont suggéré de numéroter les fonctions et de prendre le numéro comme étant une variable. Pour ceux-là, la question était close. Ils avaient un tableur de fonctions universel et il a été très difficile de leur faire admettre que le problème n'était pas résolu de façon satisfaisante et que la question restait ouverte. La solution de quelques-uns de leurs collègues qui prenaient une variable pour représenter l'ensemble des fonctions, leur paraissait de la ratiocination, impression qu'ils exprimaient sans ménagement. Cette expérience, que nous n'avons pas documentée suffisamment, nous incite à la prudence. Devant un saut conceptuel, les élèves ont des capacités importantes de résister à la déstabilisation et à la restructuration qui suivrait. Ils peuvent trouver des solutions qui forment un obstacle à la nouvelle connaissance.

6.11 Huitième laboratoire

Dans ce laboratoire, il ne nous reste peu de traces des tâches d'exploration du mode graphique, de reproduction d'objets simples et d'utilisation du système de repérage. Toutefois, nous avons observé que la plupart des élèves réussissent la reproduction d'objets simples. Ils procèdent en général par essais et ajustements.

Certains élèves écrivent des procédures de l'usager pour tracer comme demandé des points aux quatre coins d'un carré, une ligne de tirets et pour dessiner puis effacer un L. Les élèves utilisent le REPETE et Carole écrit une procédure récursive pour tracer des pointillés.

Dans la procédure qui trace un système d'axes, tous utilisent un REPETE pour graduer les axes. Marc, Nicole et Francis tracent en premier deux droites perpendiculaires qu'ils graduent ensuite sans s'apercevoir qu'en graduant ils redessinent les deux droites. Les autres procèdent directement avec les graduations. Certains traitent l'axe des x en entier en mode ENROULE puis de la même façon l'axe des y. Nous voudrions souligner ici que cette idée ne nous était pas venue au départ, probablement car nous avions déjà une connaissance des réels qui nous empêchait de concevoir les nombres très petits comme suivant naturellement les nombres très grands. D'une certaine façon, cette représentation des réels par un cercle virtuel dont une partie serait sur l'écran et l'autre bouclerait en arrière de l'écran, nous dérange. Elle nous paraît difficilement conciliable avec d'autres connaissances que nous tentons d'enseigner aux élèves. Nous pensons ici au fait que les valeurs de x négatives correspondent à des valeurs inférieures à 0, donc situées à gauche de 0 sur la droite réelle. Par un raisonnement semblable, on peut dire que les points situés au-dessous de l'axe des x ont une ordonnée négative et d'autant plus petite, c'est-à-dire grande en valeur absolue et négative, qu'ils sont plus bas. Comme nous avons l'impression que cette représentation des axes de coordonnées par des cercles a été induite par le fait que le mode par défaut de l'écran est le mode ENROULE, nous nous proposons de changer ceci afin que le mode par défaut soit le mode FENÊTRE et qu'ainsi les axes aient tout le loisir de disparaître de l'écran pour les valeurs de x supérieures à 120 sans réapparaître de l'autre côté.

Procédure d'Anne

```
POUR AXE
VE ENROULE REPETE 25 [ AV 10 GA 90 AV 2 RECULE 4 AV 2 DR 90 ] DR 90
REPETE 32 [ AV 10 DR 90 AV 2 RECULE 4 AV 2 GA 90 ]
END
```

Procédure de Nadine

```
POUR AXES
ENROULE
VE
CT REPETE 25 [AV 10 DR 90 AV2 RE 4 AV 2 GA 90]
GA 90
REPETE 32 [AV 10 DR 90 AV 2 RE 4 AV 2 GA 90]
END
```

D'autres graduent successivement les quatre demi-axes.

Procédure de Carole

```
POUR AXES
VE BC CT
FCAP 90
REPETE 8 [ AV 20 DR 90 AV 3 RE 6 AV 3 GA 90 ]
ORIGINE FCAP 270
REPETE 8 [ AV 20 DR 90 AV 3 RE 6 AV 3 GA 90 ]
RE 160 FCAP 0
REPETE 6 [ AV 20 DR 90 AV 3 RE 6 AV 3 GA 90 ]
FCAP 180 AV 120
REPETE 6 [ AV 20 DR 90 AV 3 RE 6 AV 3 GA 90 ]
END
```

Seule Eliane utilise une sous-procédure.

```
POUR AXES
CT VE
REPETE 12 [ GRADUER ]
ORIGINE DR 90 REPETE 16 [ GRADUER ]
ORIGINE GA 90 REPETE 16 [ GRADUER ]
ORIGINE DR 180 REPETE 12 [ GRADUER ]
END

POUR GRADUER
AV 10 DR 90 AV 2 GA 90
END
```

Peu d'élèves structurent leur procédure, ils se contentent d'aligner commande après commande dans une ou deux instructions, satisfaits de l'effet produit.

Lors de l'utilisation de cette procédure au neuvième laboratoire, certains la modifient. Francis ajoute VIDECRAN (VE) et Christiane ajoute VE et CACHETORTUE (CT).

Tous les élèves auront à harmoniser l'état du crayon après avoir tracé un graphe et avant de tracer de nouveau des axes. Cette mise au point est toujours intégrée aux procédures.

Certains exercices visent à regrouper les primitives graphiques ayant des caractéristiques communes.

> *4. Combien y a-t-il de primitives qui agissent sur la position de la tortue? sur son orientation?*
>
> *14. Les primitives données dans le glossaire sont séparées en six groupes. Dites ce que les primitives d'un même groupe ont en commun entre elles.*

Dans le glossaire, les informations données dans la définition sont à la fois concises et précises. Si une telle écriture est économique et facilite le recouvrement d'informations quand on sait précisément ce qu'on cherche, il est clair qu'elle ne facilite pas l'acquisition de connaissances nouvelles car elle est trop dense; elle ne contient pas la redondance qui permet une bonne assimilation. Nous recommandons donc de proposer aux élèves un certain traitement de cette information selon plusieurs angles différents. Comme nous désirons centrer le cours sur la construction du concept de fonction, nous avons opté pour des traitements qui tournent autour des concepts de domaine et d'image élargis aux primitives graphiques, qu'elles soient ou non des fonctions au sens propre. Ce faisant nous pensons être fidèle à la conception du Logo comme un langage fonctionnel, jusque dans sa facette graphique.

Nous proposerons aux élèves une façon de mettre une structure sur l'ensemble des vingt-huit primitives graphiques en utilisant différents critères de classification. Notre choix a porté sur des critères qui apportent le plus possible d'information sur les primitives, leur champ d'action, leur domaine et leur image.

Certaines primitives agissent ou renseignent sur la tortue, d'autres le font sur le crayon et d'autres enfin sur l'écran. Ce champ d'action est le premier critère que nous avons retenu. Certaines primitives graphiques sont des opérations, elles retournent un résultat, d'autres sont des commandes , elles produisent un effet graphique. Cette distinction constitue notre second critère. Certaines primitives n'ont besoin d'aucune entrée, d'autres ont besoin d'une entrée numérique et d'autres encore ont besoin d'une entrée sous forme d'une liste de deux nombres. C'est notre troisième critère. Parmi les primitives graphiques qui requièrent une entrée, certaines demandent une distance, d'autres demandent un angle, d'autres demandent une coordonnée et d'autres enfin demandent la liste de deux coordonnées. On peut classifier ces primitives selon la signification de l'entrée requise. De la même façon, on peut classifier les primitives qui retournent un résultat selon la signification de celui-ci.

Ces exercices de classification permettront de préparer les élèves à l'identification des catégories adoptées dans le glossaire de façon cachée.

6.12 Neuvième laboratoire

Les tâches du neuvième laboratoire consistent à faire le lien entre les connaissances graphiques du huitième laboratoire et le processus de scrutation du septième laboratoire afin de produire une procédure qui trace le graphe d'une fonction.

Dans une deuxième étape, l'élève doit généraliser ce procédé au graphe de toute fonction donnée par une procédure. Enfin dans les exercices d'application, l'élève écrit des procédures de fonction comme il l'a fait au troisième laboratoire et trace les graphes correspondants.

6.12.1 L'écriture d'un programme traceur de graphe

L'écriture d'un programme traceur de graphe nous semble être vu par les élèves comme présentant un certain intérêt dans la mesure où il permet effectivement de traiter une grande variété de fonctions. À partir du moment où l'introduction d'une variable permet théoriquement de travailler sur toute fonction représentée par une procédure, les élèves, peu expérimentés, ne perçoivent pas les difficultés inhérentes à la position de l'origine au centre de l'écran, à l'unité par défaut de l'écran et pensent avoir à leur disposition un traceur universel. Ces remarques nous viennent de réflexions d'élèves en cours de travail au laboratoire mais n'ont pas fait l'objet d'une collecte particulière de données. Cette opinion des élèves est sûrement renforcée par le fait que nous ayons choisi, à une exception près, de leur faire étudier uniquement les graphes de fonctions bien visibles à l'écran. Nous n'avons pas l'intention de revenir sur cette décision. En effet, pour traiter l'ensemble des fonctions calculables de façon satisfaisante pour l'œil, il faudrait des procédures de translation des axes et de changement des unités. Or, ces procédures déplaceraient le centre d'intérêt des fonctions comme objet d'étude vers les graphes et changeraient le statut de ceux-ci. Dans notre approche actuelle, les graphes ne sont que des outils de représentation des fonctions et non pas des objets d'étude en eux-mêmes. L'étude de la translation des axes et le changement des unités s'insèrent plutôt dans la géométrie analytique que dans la théorie des fonctions.

L'écriture du traceur nous semble donc être acceptée par les élèves comme étant une motivation suffisante pour traiter les fonctions comme des objets susceptibles d'être traités, manipulés, représentés par des procédures. C'est ici qu'on assiste à **un changement de point de vue conceptuel. Les fonctions** précédemment étudiées une à une **sont alors considérées globalement, indépendamment de leurs caractéristiques particulières.** Avec le traceur de graphes, l'élève accède au domaine des foncteurs.

Les élèves ont-ils vraiment effectué ce saut conceptuel? Nous n'avons pas relevé de données sur ce sujet à ce stade-ci. Toutefois, le travail effectué en adoptant ce même point de vue dans les dixième et onzième laboratoires nous laisse penser qu'effectivement ils font un pas dans cette direction.

6.12.2 Utilisation du traceur de graphe

La représentation de la fonction par une procédure

Toutes les équipes tracent tous les graphes demandés. Toutefois, cette capacité collective ne se retrouve pas nécessairement chez chaque élève. En effet, nous avons fait passer une évaluation individuelle pour cette activité. Chaque élève se présente au laboratoire muni de sa disquette sur laquelle il a enregistré son traceur de graphe. On lui propose une fonction définie par son expression, il doit en tracer le graphe et utiliser le graphe ou d'autres procédures pour évaluer ou calculer le domaine, les zéros, l'ordonnée à l'origine et l'image.

Nous avons remarqué que certains élèves sont incapables de faire ce travail seuls. La première difficulté est d'écrire la procédure représentant la fonction. Marc, Christophe et Carole n'y arrivent pas. Il s'agit pourtant d'un apprentissage du troisième laboratoire dans lequel les élèves doivent écrire une quinzaine de procédures et cet apprentissage est repris dans le neuvième laboratoire par l'écriture de seize fonctions, trois asymptotes horizontales et trois asymptotes verticales. Or, les expressions utilisées dans l'examen sont de complexité comparable à celles qu'on a utilisées dans chacun des deux laboratoires. Il semblerait donc que la répétition est inefficace et que ceux qui n'ont pas appris sur les six premiers exemples n'apprennent pas non plus sur les 26 suivants. Il faudrait trouver pour ces élèves une autre façon d'aborder l'écriture des fonctions. Pour y arriver, nous aurons besoin d'une analyse plus détaillée de leurs difficultés. Nous reportons ce travail à une année où nous aurons collecté des données permettant cette analyse.

On peut penser qu'en équipe de deux, l'écriture d'une procédure ne pose pas de problème, puisque chacun corrige les erreurs commises par l'autre. Dans la mesure où nous visons à ce que chaque élève fasse les apprentissages visés, il nous paraît important de faire des évaluations individuelles et de les annoncer de manière à ce que chaque élève travaille en sachant qu'il devra réussir seul un certain nombre de tâches. Ceci nous paraît suffisamment important pour que nous recommandions des évaluations individuelles des tâches de manipulation au laboratoire, et ceci régulièrement, de manière à ce que les élèves non seulement sachent ce qu'il faudrait faire, mais réussissent aussi à le faire. Ces évaluations individuelles peuvent contribuer à augmenter la motivation de certains élèves. Il est possible que pour quelques uns d'entre eux ce soit suffisant pour que l'écriture de procédures représentant des fonctions soit réglée avant le neuvième laboratoire. Ils pourraient alors avec les 16 fonctions de ce laboratoire, accroître la variété de leur expérience des graphes de fonctions au lieu de centrer leur attention sur l'écriture des procédures de fonctions.

Nous voudrions insister ici sur l'importance **de mettre les élèves en présence de la plus grande variété possible de graphes**. En effet, la plupart des élèves ne connaissent bien en arrivant au cégep que les droites et les paraboles restant avec l'impression que ce sont les seuls types de graphes. Il est souhaitable de leur donner l'occasion de modifier cette conception le plus vite possible.

La détermination du domaine

La seconde difficulté de l'utilisation du traceur de graphe est de tenir compte du domaine de la fonction. Nadine considère que le domaine de la fonction définie par $f(x) = 5\sqrt{2x + 36}$ est]-17,5,∞ et trace la fonction sur l'intervalle [-17,5 ,100].

Anne, Carole et Marc bien qu'ayant convenablement déterminé le domaine ne tracent qu'une des branches de la fonction. On peut penser que c'est parce qu'ils ne font pas le lien entre le domaine de la fonction et l'intervalle ou les intervalles sur lesquels ils tracent la fonction. En effet, on a demandé à quatre d'entre eux quelles entrées de leur procédure TRACEGRAPHE dépendent du domaine de la fonction. On peut ordonner la compréhension qu'ils invoquent selon le degré d'abstraction de la réponse fournie. Nadine propose de nombreuses réponses dont les bonnes, mais on peut douter qu'elle comprenne de quoi il s'agit car elle exclut -17,5 du domaine et s'en sert tout de même comme entrée. Anne propose toutes les occurrences de la variable x dans la procédure, alors que celle-ci désigne bien l'abscisse du début du graphe mais elle oublie de mentionner BORNESUP qui désigne l'abscisse de la fin. Francis a compris le principe et l'énonce sous forme numérique en donnant les valeurs des entrées alors que Christiane réfère à ces mêmes entrées par leur nom.

Il est clair sur cet exemple qu'il ne suffit pas d'avoir écrit une procédure pour faire le lien avec les concepts mathématiques qui s'y rattachent. Nous devons être attentifs à revenir de manière explicite à ces concepts et à demander aux élèves de verbaliser ces liens.

Le degré de structuration atteint

Après avoir représenté la fonction par une procédure et avoir déterminé le domaine, l'élève devrait pouvoir utiliser le traceur facilement. C'est pourquoi nous considérons qu'il invoque pour ce faire une compréhension abstraite d'objets du domaine des fonctions. Précisons que le sous-concept mis en jeu ici est celui de graphe en tant que variante graphique de la représentation d'un ensemble de couples. C'est un exemple de progression dans la trame conceptuelle. Dans cette séquence didactique, l'élève doit avoir compris en particulier le sous-concept de domaine pour aborder le concept de graphe. Nous voyons que **la progression dans la trame conceptuelle nous permet mieux que la progression dans les paliers d'abstraction, de rendre compte, dans ce cas, de la construction des connaissances.**

Christiane, Eliane, Francis et Nicole invoquent pour tracer le graphe de la fonction une compréhension abstraite de ce concept.

6.12.3 Les sous-concepts

Une fois la courbe tracée, l'élève avait à identifier certaines caractéristiques de la courbe. Ce sont ces habiletés que nous pensions avoir développées au neuvième laboratoire.

À l'examen de laboratoire, Christophe, Nadine et Marc n'arrivent pas à trouver de quelque façon que ce soit les zéros. Christophe et Marc n'ont aucune idée de ce qu'il faut trouver; l'un résout $f(x) = 1$ et l'autre donne $\mathbb{R}$ comme réponse. Quant à Nadine, elle a un comportement qui lui est familier. Elle sait ce qu'il faudrait faire mais ne sait pas le faire.

Quels sont les zéros? ***Aucun***

Comment les calculer? ***ÉCRIS EXAMEN -17,5***

Réponse 5

Il faut que ça donne 0

Comment les trouver sur le graphe? ***Il faut que ta fonction touche à l'axe des x.***

Tous sauf Carole arrivent à trouver l'ordonnée à l'origine. On peut considérer qu'ils invoquent une compréhension procédurale de ce concept indépendamment du cadre utilisé, l'algébrique ou le graphique. Carole ne pense pas à calculer $f(0)$ car son graphe est incomplet. Elle répond qu'il n'existe pas d'ordonnée à l'origine même si elle a déjà mentionné que le domaine est $\mathbb{R}/\{-30\}$ ce qui signifie en particulier que f(0) existe. Le graphe, le domaine et le calcul sont trois cadres dans lesquels elle pourrait aborder l'ordonnée à l'origine. Or, elle utilise le cadre graphique et ne pense pas à confirmer cette information en changeant de cadre.

En dernier lieu, on demande aux élèves de déterminer l'image de la fonction. Contrairement aux autres questions, celle-ci a été abordée au laboratoire de façon graphique mais n'a pas été reprise algébriquement. Christiane, Francis et Nicole déterminent convenablement l'image. Christiane et Francis qui avaient à étudier des courbes présentant un minimum absolu, ont recours à l'algèbre pour trouver ce minimum et en déduire l'image. Pour la courbe que Nicole étudie, seul l'examen du graphe permet, dans l'état de ses connaissances, de déterminer l'image. Eliane qui étudie une courbe semblable, mentionne qu'il y a une valeur de y qui n'est pas dans l'image mais contrairement à Nicole, elle ne peut pas l'identifier. Parmi ceux qui n'arrivent pas à déterminer l'image, seule Eliane partait d'un graphe complet. D'autres devaient tracer le graphe d'une fonction discontinue et n'en avaient tracé qu'une branche. Il semblerait que ces élèves, bien qu'ils aient tracé dans les exercices plusieurs courbes discontinues, n'aient pas suffisamment assimilé cette connaissance et soient restés avec une conception que nous avons décrite dans l'analyse historique, à l'effet qu'une fonction est quelque chose dont le graphe est en un seul morceau. Satisfaits du graphe qu'ils obtiennent, ils s'en contentent pour déterminer l'image et parfois le domaine.

Seuls Francis, Christiane et Nicole invoquent une compréhension procédurale de l'image d'une fonction. Il nous semble que ce concept est loin d'être clair pour les élèves. Nous avons l'impression qu'une des sources de malentendu est le vocabulaire utilisé. En effet, on utilise le même mot "image" pour désigner l'image d'une valeur de x et celle de la fonction. Nous recommandons d'énoncer et d'approfondir la différence entre ces deux concepts et leur lien.

6.13 Troisième entrevue

À la fin de la session au cours du mois de décembre, lors de la dernière entrevue, nous avons proposé aux élèves un contexte. (Annexe nº6) Ils devaient répondre à une série de questions qui les amenaient à décrire le phénomène par une décroissance exponentielle. Par la suite, nous leur demandions d'utiliser ce modèle pour en tirer d'autres informations. Le contexte choisi était nouveau mais la solution exigée était classique. L'élève devait élaborer un raisonnement rencontré à plusieurs reprises auparavant, autant en exercice qu'en examen.

La lecture de la retranscription de ces entrevues nous permet d'observer que tous identifient correctement la variable indépendante et la variable dépendante. L'uniformité des comportements s'arrête là. Il est possible de répartir les élèves en quatre sous-groupes. Anne et Marc ne reconnaissent pas le modèle. Ils proposent de travailler avec le modèle linéaire et tentent d'enlever 2% à 1000. Anne mentionne ses difficultés de calcul. Elle réfléchit pendant quelques minutes puis propose le modèle exponentiel décroissant pour décrire le phénomène, sans en être certaine. Elle essaie d'établir l'expression, accroche à plusieurs reprises et demande du support de la part du professeur. Finalement, elle réussit à établir l'expression algébrique, à calculer pour le premier couple mais ne peut pas tracer l'allure du graphe. Elle avoue même qu'elle confond toujours le graphe d'une fonction exponentielle et d'une fonction logarithmique. Marc, de son côté, écrit une variable comme exposant mais il établit une liste de couples en utilisant une diminution constante. Il ne demande pas d'aide et conclut que les couples proposés ne sont pas représentatifs. Il est incapable de caractériser l'ensemble des couples décrivant le phénomène étudié.

Carole, Christophe et Nadine constituent le deuxième sous-groupe. Ils reconnaissent le modèle mais sont incapables d'établir l'expression algébrique. Carole et Christophe partent de la forme générale correcte mais ne réussissent pas à attribuer les bonnes valeurs aux paramètres. Par contre, Nadine affirme que le phénomène suit un modèle exponentiel qu'elle représente par l'expression $a - b^x$. Au moment d'essayer d'attribuer des valeurs pour vérifier si le couple proposé décrit le phénomène, elle avoue être désemparée par les calculs.

Francis se retrouve seul dans sa catégorie. Il reconnaît le modèle; il établit l'expression sans arriver à effectuer les calculs. Il affirme que la variable indépendante est le nombre d'années écoulées à partir de 20 ans mais il utilise l'âge de l'individu au moment de calculer. De plus, il précise que la base vaut 98% tout en utilisant 98 pour calculer. Toutefois, il répond correctement à la dernière question en verbalisant le fait que plus les valeurs de la variable indépendante augmentent plus celles de la variable dépendante diminuent.

Eliane, Nicole et Christiane forment le quatrième sous-groupe. Elles reconnaissent le modèle, établissent l'expression algébrique correctement et mènent les calculs jusqu'au bout. Elles peuvent décrire tous les couples même si pour Christiane le vocabulaire vient difficilement.

La réussite complète de cet exercice fait appel à plusieurs domaines de la trame conceptuelle. Nous pouvons dire que Nicole, Eliane et Christiane invoquent une compréhension abstraite d'objets du domaine des fonctions. Francis pourrait faire partie de cette classe si ce n'était son erreur d'interprétation du pourcentage.

Les difficultés rencontrées par les autres élèves ne nous permettent pas ici de conclure.

6.14 Une piste de travail à poursuivre

Nous venons d'analyser un des aspects du travail réalisé par nos élèves au cours d'une session. Nous nous sommes attardées en grande partie au travail des neuf premières semaines au laboratoire.

Certaines leçons se sont avérées particulièrement importantes. Nous faisons allusion à la **représentation d'une fonction par une procédure** où l'élève doit distinguer fonction et expression algébrique de la fonction tout en étant obligé de coder cette expression. **Le codage de l'expression algébrique devient l'exercice-clé** qui confirme que le saut conceptuel s'est effectivement réalisé.

Nous pensons aussi aux **opérations sur les fonctions** où l'élève doit déterminer le domaine de la fonction résultat. **La détermination du domaine de la fonction provenant de la division de deux fonctions devient l'exercice-clé** de cette leçon lorsque l'élève énonce explicitement la relation entre ce domaine, ceux des opérandes et les zéros de la fonction diviseur.

Enfin, nous constatons qu'un premier pas dans **la modélisation de situations issues du monde physique** à l'aide des fonctions linéaire et exponentielle **assure un nouveau saut conceptuel** à l'élève qui réussit à modéliser les deux types de situations. **Ce saut conceptuel n'est à la portée que des élèves ayant une compréhension abstraite des concepts de variable et de fonction.**

Le reste du temps d'enseignement est consacré à la modélisation de situations faisant appel à d'autres fonctions. Les premières observations nous poussent à poursuivre le travail. Toutefois, nous ne pouvons pas à cette étape en décrire les enjeux notionnels.

7

Le Rapport Individuel

des élèves au savoir

La pratique d'enseignement est irréductible, dans la mesure où l'enseignant doit, par une suite de décisions et d'actions, conduire chaque élève individuellement à décider et à agir pour construire son savoir personnel; et la responsabilité qui lui est attachée ne peut être évacuée.
Giordan, L'élève et/ou les connaissances scientifiques, p. 18

Conscientes de la responsabilité attachée à l'enseignement, nous voulons vérifier si les élèves qui réussissent les leçons que nous avons identifiées comme étant des leçons-clé sont ceux qui pourront continuer à faire des mathématiques avec succès et plus particulièrement, tirer profit d'un cours de calcul. Y a-t-il des élèves qui ne font pas le saut vers la compréhension abstraite des concepts de variable et de fonction? Nous nous proposons ici de répondre à cette interrogation par l'analyse du rapport individuel des élèves au savoir.

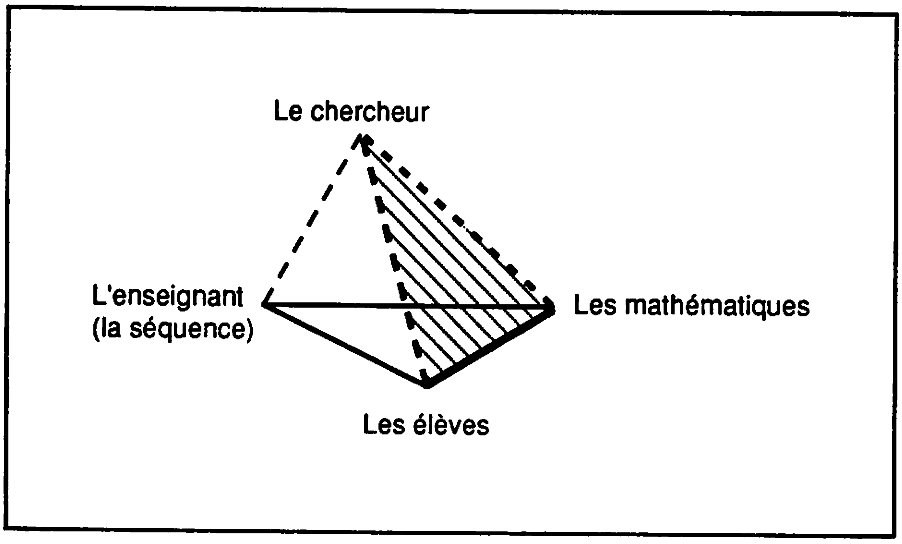


Figure 5. L'analyse des productions des élèves et de leur rapport au savoir

Le caractère d'individualité a été nécessairement perdu de vue au milieu de l'analyse des productions classifiées selon les activités proposées. Nous désirons y revenir en donnant une vision globale du cheminement de chaque élève à l'aide d'un tableau. La description du comportement individuel ne suit pas un déroulement chronologique mais est présentée selon les domaines conceptuels et les objets mis en cause. Nous présentons à la dernière colonne les résultats obtenus lors d'exercices spécifiques mentionnés à la troisième colonne et déjà analysés au sixième chapitre. Dans la deuxième colonne, nous reproduisons brièvement quelques extraits des productions qui donnent la couleur de chaque élève.

Nous présentons les élèves en regroupant ceux qui ont des comportements mathématiques semblables.

7.1 Le cheminement individuel

7.1.1 Christiane et Nicole partent gagnantes

Nicole et Christiane, dont la session est décrite dans les tableaux XXI et XXII, entreprennent le cours 201-302 avec un bon bagage de connaissances et de bonnes habitudes de travail. L'étude de leur dossier scolaire nous révèle que Christiane a obtenu un premier diplôme d'études collégiales d'un programme professionnel avec de bons résultats et que Nicole vient de terminer avec succès la voie à option du secondaire.
L'analyse des productions de ces deux élèves nous permet de constater que Nicole invoque toujours une compréhension abstraite des objets algébriques ou fonctionnels, selon les besoins et que Christiane y arrive presque toujours. Leur travail régulier permet de tirer profit de la séquence proposée comme des autres stratégies pédagogiques qui leur ont été proposées. Ce sont des élèves qui encouragent le professeur à poursuivre même si elles donnent peu d'information quant à la pertinence de la méthode proposée. Elles réussissent toutes les deux très bien les trois leçons-clé et obtiennent de bons résultats pour les cours de pré-calcul et de calcul.

Nicole a décidé de suivre un cours de calcul II alors que ce cours ne figure pas dans le programme de techniques administratives. Elle l'a très bien réussi. Elle représente ce groupe d'élèves qui choisit un programme professionnel enrichi par les cours exigés lors des admissions à un programme universitaire. Ce groupe vient modifier les règles du jeu, sans effet négatif pour l'ensemble du programme collégial aussi longtemps qu'il représente une situation exceptionnelle. Si un jour une grande majorité d'élèves choisissent ce programme professionnel avec l'intention de poursuivre leur formation à l'université, nous devrons être vigilants pour ne pas sous-estimer les difficultés des autres élèves pour qui le programme avait été effectivement conçu.

Les capacités de Christiane justifieraient de partager les mêmes ambitions d'études universitaires mais elle estime qu'elle doit accéder au marché du travail le plus tôt possible, ayant déjà passé plusieurs années au collégial.

Christiane (4109)

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Etat des connaissances	Deuxième sous-groupe		
Cours au secondaire Programme déjà suivi au collégial.(A-87)	Les cours 432-522 sont réussis. Tech. écologie appliquée: très bien réussi.		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes			
- décoder (c. proc. d. ar.)	Elle n'obtient pas le résultat car elle écrit produit au lieu de différence.	Test lab2 Q2	
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c. abs. d. ar.)	Elle perçoit la racine carrée comme une opération diadique et elle écrit produit au lieu de différence.	Test lab2 Q2	
- coder (c. abs. d. ar.)	Elle fait le codage correctement même si elle ajoute des parenthèses pour bien identifier les opérandes.	Test lab2 Q1	c. abs. d. ar.
Variable			
- donner une définition	*"Symbole occupant la place d'une valeur non déterminée dans une équation."*	Etat des c. Q10	idée d'inconnue
- choisir une définition	Tout symbole dont la valeur n'est pas déterminée est appelé variable.	Etat des c. Q11	idée d'inconnue
- donner un exemple	*" Quand on parle de fonction. Ca prend deux nombres dépendants l'un de l'autre."* Par exemple, *" le montant recueilli dans un autobus selon le nombre de personnes. Donc tu as une variable dépendante."*	Entrevue 1	idée de dépendance
- utiliser la notation fonctionnelle pour une procédure (c. abs. d. al.)	Elle utilise convenablement le formalisme sans tenir compte des détails techniques.	Ex.2 Q5	c. abs. d. al.
pour un contexte (c. abs. d. fonc.)	Elle identifie les variables correctement.	Ex.2 Q1a)	c. abs. d. fonc.
pour la procédure de construction d'une fonction (c. abs. d. fonc.)	Elle donne convenablement les entrées et les sorties. Au dernier examen, elle peut expliquer tout le processus de construction.	lab 10 et11 Ex.4 Q6	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Elle l'écrit correctement. Elle l'écrit correctement même au neuvième laboratoire et elle donne l'allure du graphe au complet.	Ex.1 Q1b) Test lab9	c.int. d. fonc.
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	*"Une fonction est une relation qui existe entre deux variables, une dépendante, une indépendante."*	Entrevue 1	c.proc. d. fonc
- donner une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y) qui peut être infini, dans lequel à chaque valeur de la variable x correspond une valeur de la variable y.	Etat des c. Q7	relation asymétrique des rôles
- choisir une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y)... *"car ça répond à une définition de fonction."* ... *"y dépend de x."*	Entrevue 2	ensemble de couples
- déterminer le domaine à partir de l'expression (c. proc. d. al.)	Elle détermine les domaines en respectant les restrictions.	Ex.1 Q1a)	ensemble de couples
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Elle énonce le bon raisonnement mais recopie le mauvais intervalle pour conclure.	Ex.1 Q1d)	c. abs. d. al.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Elle le trace correctement .	Ex.1 Q1e)	c. abs. d. fonc.
- déterminer l'image de fog d'une valeur connue de x (c. proc. d. fonc.)	Elle la calcule sans erreur.	Ex.1 Q1g)	c. proc. d. fonc.
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	Elle remplace x par z dans la ligne titre et dans la ligne expression.	Variable-fonction Q6	c. proc. d. fonc.
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc.)	Elle mène le raisonnement jusqu'au bout .	Ex.1 Q1f)	c. abs. d. fonc.
- différencier le produit et la composée de deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Elle explique bien la différence en reprenant la description du processus de calcul de façon générale.	Entrevue 2	c. abs. d. fonc.
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c. abs. d. fonc.)	Elle utilise la sous-procédure correctement, ce qui permettra d'obtenir le résultat attendu.	Variable-fonction Q9	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation			
- reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle et mène ses calculs correctement jusqu'au bout.	Ex.2 Q1	c. abs. d. fonc.
- reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle mais elle fait une erreur au moment de déterminer la base.	Ex.2 Q2	
- choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)	*"Il faut regarder s'il y a un lien entre deux choses."* ... *"On voit souvent les années. Par exemple, le nombre de naissances par année."*	Entrevue 2	
- choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle. Elle ne fait pas la même erreur qu'à l'examen, elle détermine la base correctement. Elle donne une représentation graphique du phénomène.	Entrevue 3	c.abs. d. fonc.
Note finale en 302	88%		
Cours de mathématiques suivis par la suite	Calcul 1 (H-91) 90%		
Cours de comptabilité	Comptabilité 1 (A-90) 90% Comptabilité 2 (H-91) 90% Comptabilité 3 (A-91) 87%		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Nicole (4110)

Tâche et intention	**Production**	**Occasion**	**Palier et domaine**
Etat des connaissances	Premier sous-groupe		
Cours au secondaire	Les cours 414-434-514-534 sont réussis.		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes			
- décoder (c. proc. d. ar.)	Elle obtient le bon résultat.	Test lab2 Q2	c. proc. ar.
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c. abs. d. ar.)	Elle trace le diagramme correctement.	Test lab2 Q2	c. abs. d. ar.
- coder (c. abs. d. ar.)	Le codage est adéquat. Elle utilise un produit plutôt que de considérer l'opposé.	Test lab2 Q1	c. abs. d. ar.
Variable			
- donner une définition	*"Une variable est une lettre quelconque à laquelle correspond une certain valeur. Exemple, la variable x peut avoir la valeur 3, 100, -4, etc. "*	Etat des c. Q10	idée de domaine
- choisir une définition	Une variable est un symbole qui peut être remplacé par n'importe quel élément d'un ensemble précis de nombres.	Etat des c. Q11	idée de domaine
- donner un exemple	*"f(x)=2x. Si je donne une valeur à x, ça va donner une réponse qui est f(x). Si je donne 1,ça va donner deux."*	Entrevue 1	idée d'unicité de l'image
- utiliser la notation fonctionnelle pour une procédure (c. abs. d. al.)	Elle décrit chaque entrée ainsi que l'effet produit.	Ex.2 Q5	c. abs. d. al.
pour un contexte (c. abs. d. fonc.)	Elle identifie les variables en prenant le temps de bien indiquer celle qui est indépendante et celle qui est dépendante.	Ex.2 Q1	c. abs. d. fonc.
pour la procédure de construction d'une fonction (c. abs. d. fonc.)	Au dernier examen, elle décrit très bien les entrées de la procédure de construction.	Ex.4 Q6	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Elle écrit la procédure complète.	Ex.1 Q3b)	c..int d. fonc.
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	Elle l'écrit à nouveau correctement au neuvième laboratoire et donne l'allure du graphe au complet.	Test lab9	c. proc. d. fonc.
- donner une définition	*"Une fonction, c'est comme une opération qu'on fait faire avec une variable dépendante puis une variable indépendante. C'est comme une condition."*	Entrevue 1	
- choisir une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y) qui peut être infini, dans lequel à chaque valeur de la variable x, correspond une valeur de la variable y	Etat des c. Q7	ensemble de couples
	"Je réponds c) car on sait qu'en prenant une certaine valeur à x, je vais avoir seulement une réponse pour y".	Entrevue 2	unicité de l'image
- déterminer le domaine à partir de l'expression (c. proc. d. al.)	Elle le détermine correctement.	Ex.1 Q3a)	c. proc. d. al.
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Elle le détermine en donnant toutes les justifications.	Ex.1 Q3d)	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Elle donne le diagramme correctement.	Ex.1 Q3e)	c. proc. d. fonc.
- déterminer l'image de fog d'une valeur connue de x (c. proc. d. fonc.)	Elle la détermine sans erreur.	Ex.1 Q3g)	c. proc. d. fonc.
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	Elle remplace x par y dans la ligne titre et dans la ligne expression.	Variable-fonction Q6	c. proc. d. fonc.
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc.)	Elle le détermine sans problème.	Ex.1 Q3f)	c. abs. d. fonc.
- différencier le produit et la composée de deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Elle explique bien la différence en donnant un exemple de calcul.	Entrevue 2	c. abs. d. fonc.
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c. abs. d. fonc.)	Elle utilise la sous-procédure avec la bonne idée, toutefois elle oublie de noter l'entrée associée à cette sous-procédure. Nous pouvons penser que cette erreur aurait été corrigée si elle avait pu tester cette procédure avec l'ordinateur.	Variable-fonction Q9	c. abs d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intentiòn	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation			
- reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)	Le modèle est reconnu et bien déterminé.	Ex.2 Q1	c. abs. d. fonc.
- reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)	Le modèle est reconnu et bien déterminé.	Ex.2 Q2	c. abs. d. fonc.
- choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)	*Quand on lit l'article, on peut voir qu'il y a des valeurs. Ça prend au minimum deux valeurs qui peuvent varier. Ici, j'ai le taux de la population active en 1981 puis en 1982. Elle a varié. Donc on voit que le temps a changé et que le taux de la population active a changé. Ça fait deux points dans un graphique. Puis je peux trouver l'équation."*	Entrevue 2	c. abs. d. fonc.
- choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle et explique tout très bien.	Entrevue 3	c. abs. d. fonc.
Note finale en 302	98%		
Cours de mathématiques suivis par la suite	calcul 1 (A-90) 97% calcul 2 (A-91) 91%		
Cours de comptabilité	comptabilité 1 (A-90) 97% comptabilité 2 (H-91) 91%		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

7.1.2 Carole, Francis et Eliane profitent amplement du cours

Francis, Eliane et Carole, dont la session est décrite dans les tableaux XXIII à XXV, se ressemblent par leur ardeur au travail. Ils manifestent une attitude positive qui se traduit, en particulier pour Francis, par de longues périodes de discussions avec le professeur. Toutefois, les apprentissages se font moins facilement que pour les deux premières élèves. Carole semble avoir des difficultés d'adaptation face aux nouvelles activités. Elle a besoin de temps pour comprendre le codage à l'aide des primitives préfixes et la représentation à l'aide du diagramme de plomberie. Très tôt, elle peut généraliser le concept de variable au concept de fonction, ce qu'elle verbalise facilement lors des entrevues. Par contre, il lui est difficile de supporter son raisonnement par des manipulations algébriques. Cette difficulté est bien visible lors de la dernière entrevue lorsqu'elle essaie d'établir l'expression algébrique. L'examen de ses solutions nous montre qu'elle tombe souvent dans le piège des erreurs de calcul arithmétique ou algébrique.

De son côté, Eliane ne fait pas d'erreur de calcul mais elle se détache difficilement de l'arithmétique. Elle n'invoque qu'occasionnellement une compréhension abstraite des fonctions. Tout comme Francis, elle a besoin de temps de maturation pour les nouveaux concepts; elle désire entendre toutes les justifications mettant en valeur le bien fondé des différentes exigences. Ce souci de bien comprendre est une caractéristique appréciable de ces élèves qui ne choisissent pas la facilité. Malgré un rythme d'apprentissage plus lent et une capacité d'abstraction plus laborieuse, ils ont réussi tous les trois le cours de calcul. Le cours semble viser particulièrement ces élèves. Les élèves plus forts sont ceux dont on dit, probablement à tort, qu'ils n'auraient pas besoin du cours et les élèves plus faibles ne sont pas en mesure d'en profiter autant.

Nous ne percevons pas pour ces trois élèves un problème de motivation face aux études; contrairement à Francis, Carole et Eliane ne persistent pas dans le programme de techniques de la gestion. Elles sont admises dans un autre collège à la fin de la première année. Selon les dernières informations, Eliane continuait avec enthousiasme dans ce nouveau programme mais Carole regrettait son choix et se préparait à changer à nouveau. Cette dernière, tout en étant une élève sérieuse, se bute au problème du choix de sa carrière.

Carole (4111)

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Etat des connaissances	Troisième sous-groupe		
Cours au secondaire	Les cours 414-434-534 sont réussis.		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes - décoder (c. proc. d. ar.)	Elle n'arrive pas au résultat final même si elle obtient plusieurs résultats intermédiaires.	Test lab2 Q2	
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c. abs. d. ar.)	Elle trace un diagramme plus schématique. Elle n'arrive pas à enchaîner les opérations.	Test lab2 Q2	
- coder (c. abs. d. ar.)	Elle code l'opposé à l'aide d'une différence. La suite du codage est correcte.	Test lab2 Q1	
Variable - donner une définition	*"Une variable est une lettre x ou y (celles le plus souvent utilisées) auxquelles on donne une valeur inconnue dans une équation donnée."*	Etat des c. Q10	idée d'inconnue
- choisir une définition	Les variables ont deux utilités: elles permettent à établir des lois, ... donne le résultat dans un grand nombre de cas particuliers par simple substitution et sans nouveau calcul.	Etat des c. Q11	généralité
- donner un exemple	*"Le nombre de litres d'essence que prend une automobile qui se déplace."* *"Comme l(x) = 20x + 3. Ce serait 20$ plus le nombre de litres au total."*	Entrevue 1	idée de dépendance
- utiliser la notation fonctionnelle pour une procédure (c. abs. d. al.)	Elle comprend la signification des variables et l'effet produit mais ne maîtrise pas les conventions d'écriture.	Ex.2 Q6a)	
pour un contexte (c. abs. d. fonc.)	Elle identifie correctement les variables.	Ex.2 Q1a)	c. abs. d. fonc.
pour la procédure de construction d'une fonction (c. abs. d. fonc.)	Au dernier examen, elle décrit correctement les entrées et les sorties de la procédure de construction d'une fonction.	Ex.4 Q6	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c.abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Elle écrit une procédure complète en utilisant des primitives préfixes pour coder l'expression algébrique.	Ex.1 Q3b)	c. int. d. fonc.
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	Elle n'y arrive pas lors de l'évaluation du neuvième laboratoire. Après correction de la procédure, elle trace un graphe incomplet.	Test.lab9	
- donner une définition	*"Une fonction ça prend toujours un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Pour exprimer une fonction, tu peux te servir du diagramme de plomberie. Dans les fonctions, tu as la valeur de x. L'image c'est la valeur de..., admettons I(x) mais on peut dire aussi y."*	Entrevue 1	ensemble de couples
- choisir une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y) qui peut être infini, dans lequel à chaque valeur de la variable x, correspond une valeur de la variable y.	Etat des c. Q7	ensemble de couples
	Une fonction est une relation entre deux ensembles. "Parce que je l'ai appris au secondaire. Puis quand tu traces un graphique, si tu as une droite verticale, ce n'est pas une fonction car tu as une valeur de y pour la même valeur de x."	Entrevue 2	unicité de l'image
- déterminer le domaine à partir de l'expression (c. proc. d. al.)	Elle donne la bonne condition mais elle n'écrit pas l'intervalle.	Ex.1 Q3a)	
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Elle n'arrive pas à déterminer les zéros de la fonction diviseur.	Ex.1 Q3d)	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c.abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Elle le trace correctement.	Ex.1 Q3e)	c. proc. d. fonc.
- déterminer l'image par fog d'une valeur connue de x.(c. proc. d. fonc.)	Elle détermine la bonne valeur pour f(g(0)).	Ex.1 Q3g)	c. proc. d. fonc.
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	Elle remplace x par a dans la ligne titre et dans la ligne expression.	Variable-fonction Q6	c. proc. d. fonc.
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc.)	Elle énonce les conditions et le détermine correctement.	Ex.1 Q3d)	c. abs. d. fonc.
- différencier le produit et la composée de deux fonctions.(c. abs. d. fonc.)	Elle explique bien la composée et reprend le diagramme de plomberie. Pour le produit, c'est plus vague et elle ne peut pas tracer le diagramme de plomberie.	Entrevue 2	
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c. abs. d. fonc.)	Elle n'utilise pas la sous-procédure, elle essaie d'écrire une procédure qui produirait le résultat attendu mais n'y arrive pas.	Variable-fonction Q9	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c.abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation			
- reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle. Elle fait une erreur de calcul même si elle attribue les bonnes valeurs aux variables.	Ex.2 Q1	
- reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle. Tout est fait correctement, les calculs et la représentation graphique.	Ex.2 Q2	c. abs. d. fonc.
- choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)	Elle parle d'augmentation constante. *"Dans mon article, on parlait de la campagne de Centraide. En telle année, il y avait tant de québécois ayant donné tant d'argent puis une autre année, c'était un autre montant. Avec ces informations, on peut calculer la pente et l'ordonnée à l'origine."*	Entrevue 2	
- choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle avec la forme générale mais elle ne peut pas attribuer les valeurs aux paramètres.	Entrevue 3	
Note finale en 302 (A-90)	74%		
Cours de mathématiques suivis pas la suite	Calcul 1 (H-91) 60%		
Cours de comptabilité	Comptabilité 1 (A-90) 80% Comptabilité 2 (H-91) 54% À l'automne 91, elle s'inscrit dans un programme "para-médical" dans un autre collège. À l'hiver 92, elle termine son année en sciences humaines avec l'intention de revenir au collège de Sherbrooke à l'automne 92.		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c.abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs.

Francis (4109)

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Etat des connaissances	Deuxième sous-groupe		
Cours au secondaire	Les cours 414-434-534 sont réussis.		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes - décoder (c. proc. d. ar.)	Il produit le résultat.	Test lab2 Q2	c. proc. d. ar.
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c. abs. d. ar.)	Sa représentation est plus synthétique. Il utilise un arbre pour représenter la structure de l'expression sans tracer de boîtes pour les opérateurs.	Test lab2 Q2	c. abs. d. ar.
- coder (c. abs. d. ar.)	Le codage est juste.	Test lab2 Q1	c. abs. d. ar.
Variable - donner une définition	*"C'est un symbole que l'on peut remplacer dans n'importe quelle équation par n'importe quel chiffre ou constante et qui donne un résultat."*	Etat des c. Q10	idée de variabilité
- choisir une définition	Tout symbole dont la valeur n'est pas déterminée est appelé variable.	Etat des c. Q11	idée d'inconnue
- donner un exemple	Il ne donne pas d'exemple.	Entrevue 1	
- utiliser la notation fonctionnelle: pour une procédure (c.abs. d. al)	Il l'utilise correctement.	Ex.2 Q5	c. abs. d. al.
pour un contexte (c.abs. d. fonc.)	Il identifie les variables correctement.	Ex.2 Q1	c. abs. d. fonc.
pour la procédure de construction d'une fonction (c.abs. d. fonc.)	Au dernier examen, il ne peut écrire qu'une partie du processus. D'ailleurs, il a négligé de compléter les exercices du onzième laboratoire même s'il avait fait ceux du dixième.	Ex.4 Q6 Lab10 et 11	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Il écrit une procédure complète.	Ex.1 Q1	c. int. d. fonc.
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	Par la suite, au neuvième laboratoire, il réussit à nouveau et donne l'allure du graphe au complet.	Test lab9	c. proc. d. fonc.
- donner une définition	*"Tout ce que je vois, c'est une formule." "Il y aurait des variables incorporées là-dedans, x serait une variable. Tu remplaces x par sa valeur et ça va donner un résultat à la fonction."*	Entrevue 1	calcul
- choisir une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y) qui peut être infini dans lequel à chaque valeur de la variable x, correspond une valeur de la variable y.	Etat des c. Q7	ensemble de couples
	Une fonction est une relation entre deux ensembles. À chaque élément de l'ensemble de départ est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée. ... *"Premièrement, une fonction ça vit. C'est une relation. Il faut que deux ensembles soient reliés."* ... *"Une fonction n'est pas réalisable si tu as pour x deux images."*	Entrevue 2	unicité de l'image
- déterminer le domaine à partir de l'expression (c. proc. d. al.)	Il peut déterminer le domaine.	Ex.1 Q1a)	c. proc. d. al.
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Il ne peut pas le déterminer car il ne cherche pas les zéros de la fonction diviseur. De plus, pour exprimer l'intersection des deux domaines, il utilise à la fois la notation d'intervalle et la notation ensembliste. Le domaine de Q(x) est $-\infty, \frac{5}{2}] \setminus \{1\}$	Ex.1 Q1d)	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Il trace le diagramme convenablement mais il écrit à la sortie f(x) au lieu de f(g(x)).	Ex.1 Q1e)	
- déterminer l'image de fog d'une valeur connue de x (c. proc. d. fonc.)	Il l'obtient sans erreur.	Ex.1 Q1g)	c. proc. d. fonc.
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	Il remplace x par z dans la ligne titre et dans la ligne expression.	Variable-fonction Q6	c. abs. d. fonc.
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc.)	Il le détermine correctement mais il confond à nouveau deux notations.	Ex.1 Q1f)	c. abs. d. fonc.
- différencier le produit et la composée de deux fonctions. (c. abs. d. fonc.)	Malgré quelques hésitations, il explique bien la différence entre le produit et la composée sans faire d'exemple.	Entrevue 3	c. abs. d. fonc.
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c. abs. d. fonc.)	Il a la bonne volonté de respecter la consigne en utilisant la sous-procédure mais il n'apporte aucun changement. La nouvelle procédure n'est que l'exécution de la première.	Variable-fonction Q9	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation			
- reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)	Il reconnaît le modèle et calcule correctement.	Ex.2 Q1	c. abs. d. fonc.
- reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)	Il ne reconnaît pas le modèle. Il utilise le modèle linéaire.	Ex.2 Q2	
- choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)	*"Habituellement, tu le reconnais par des nombres."..."Supposons tant de personnes qui ont eu tel pourcentage à un examen."..."Il faut un certain nombre qui varie en fonction d'une quantité."*	Entrevue 2	
- choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)	Il reconnaît le modèle, il établit l'expression algébrique mais il fait une erreur de calcul. Il a écrit 0,98 pour le 98% bien identifié mais il calcule avec 98. Au moment de vérifier si un couple peut satisfaire les conditions, il ne reconnaît pas son erreur seul, il tente plutôt une explication *"peut-être que durant la vingtaine ça diminue et qu'ensuite ça remonte."* Une fois que le professeur souligne son erreur liée au pourcentage, il peut décrire tous les couples. *"Plus l'âge augmente, plus les capacités intellectuelles diminuent."*	Entrevue 3	c. abs. d. fonc.
Note finale en 302	84%		
Cours de mathématiques suivis par la suite	Calcul 1 (H-91) 76%		
Cours de comptabilité	Comptabilité 1 (A-90) 83% Comptabilité 2 (H-91) 80%		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Eliane (4110)

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Etat des connaissances	Quatrième sous-groupe		
Cours au secondaire	Les cours 414-434-534 sont réussis.		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes - décoder (c. proc. d. ar.)	Elle obtient le bon résultat.	Test lab2 Q2	c. proc. d. ar.
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c. abs. d. ar.)	Le diagramme est bien tracé.	Test lab2 Q2	c. abs. d. ar.
- coder (c. abs. d.ar.)	Le codage est juste. Elle ajoute des parenthèses pour bien identifier les opérandes.	Test lab2 Q1	c. abs. d. ar.
Variable - donner une définition	*"Une variable est un nombre ou chiffre inconnu qui change selon la valeur que vous voulez lui donner."*	Etat des c. Q10	
- choisir une définition	Ellle souligne les mots qu'elle considère importants pour chaque défintion mais elle n'en choisit pas une en particulier.	Etat des c. Q11	
- donner un exemple	*"L'équation* $\sqrt{2x+1}$ *".* Elle considère l'expression 2x+1 et donne la condition à respecter. *"On veut plus grand ou égal à zéro."*	Entrevue 1	domaine
- utiliser la notation fonctionnelle: pour une procédure (c. abs. d. al.)	Elle ne peut pas décrire les entrées. Elle donne la nature de l'entrée quand le nom est demandé et n'écrit rien pour la signification.	Ex.2 Q5	
pour un contexte (c. abs. d. fonc.)	Elle ne reconnaît pas la variable indépendante.	Ex.2 Q1	
pour la procédure de construction d'une fonction (c. abs. d. fonc.)	Au dernier examen, elle fait la différence entre le nom et la nature de l'entrée mais elle ne peut pas donner la signification de celle-ci.	Ex.4 Q6	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Elle écrit la procédure complète. Elle utilise à la fois les primitives préfixes et infixes.	Ex.1 Q3b)	c. int. d. fonc.
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	Au neuvième laboratoire, elle a un problème de codage. Ce problème résolu, elle peut faire tracer le graphe.	Test lab9	c. proc. d. fonc.
- donner une définition	*"C'est l'exemple f(x)= 2x+1. C'est une fonction. Ça revient un peu au mot variable. Tu peux avoir le domaine."*	Entrevue 1	
- choisir une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y) qui peut être infini, dans lequel à chaque valeur de la variable x, correspond une valeur de la variable y.	Etat des c. Q7	ensemble de couples
	Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand un connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y. *"On donne une valeur à x, ça donne comme résultat y. Pour te dire franchement, la deuxième partie, je ne la saisis pas. Mais à comparer à b) ou à c), celle-là* (pour ensemble de couples) *est beaucoup plus générale."*	Entrevue 2	calcul
- déterminer le domaine à partir de l'expression (c. proc. d. al.)	Elle peut déterminer le domaine.	Ex.1 Q3a)	c. proc. d. al.
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Elle peut le déterminer.	Ex.1 Q3d)	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Elle l'illustre bien.	Ex.1 Q3e)	c. proc. d. fonc.
- déterminer l'image de fog d'une valeur connue de x (c. proc. d. fonc.)	Il est demandé f(g(2)) et elle calcule g(f(2)) à partir de l'expression algébrique de g(f(x)).	Ex.1 Q3g)	
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	Elle remplace x par a uniquement dans la ligne titre.	Variable-fonction Q6	
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc.)	Elle détermine le domaine correctement.	Ex.1 Q3f)	c. abs. d. fonc.
- différencier le produit et la composée de deux fonctions.(c. abs. d. fonc.)	*"La composée de deux fonctions, c'est tout simplement fog. C'est g qui entre dans f. Puis le produit, ça donne une fonction du deuxième degré."* *"J'ai g(x)=5+10x et f(x)=15+2x. Si tu les multiplies ensemble, ça va donner une fonction du deuxième degré c'est-à-dire une parabole."*	Entrevue 2	c. abs. d. fonc
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c. abs. d. fonc.)	Elle utilise la sous-procédure mais son choix ne lui permet pas d'obtenir le résultat attendu.	Variable-fonction Q9	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation			
- reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle. Elle interchange les deux variables mais elle fait une mise en équation cohérente avec ce qu'elle a posé.	Ex.2 Q1	
- reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle, elle attribue les bonnes valeurs aux paramètres mais elle essaie d'obtenir l'allure du graphe en calculant plusieurs points reliés par des segments de droite et en utilisant une graduation des axes inadéquate.	Ex.2 Q2	
- choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)	*"D'après moi, on regarde s'il y a du temps. Je veux dire les années et s'il y a des chiffres correspondants. Si on compare le phénomène avec d'autres années, il y a une fonction."*	Entrevue 2	
- choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle, établit l'expression algébrique et calcule correctement.	Entrevue 3	c. abs. d. fonc.
Note finale en 302	79%		
Cours de mathématiques suivis par la suite	Calcul 1 (H-91) 74%		
Cours de comptabilité	Comptabilité 1 (A-90) 84% Comptabilité 2 (H-91) 72% Elle quitte le collège de Sherbrooke à l'automne 91 pour aller étudier dans un autre collège dans un programme de "technologie agricole".		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

7.1.3 Christophe et Nadine ne prennent pas les moyens pour réussir le cours de calcul

Nadine et Christophe, dont la session est décrite dans les tableaux XXVI et XXVII, se ressemblent par leur attitude face aux études. Nadine arrive avec un dossier scolaire présentant des échecs en mathématiques tant au secondaire qu'au collégial. Elle a déjà suivi et échoué le cours 201-302. Nous pourrions penser qu'elle a malgré tout fait quelques progrès. Christophe donne plusieurs bonnes réponses au questionnaire "Etat des connaissances" et nous apparaît comme étant un élève prometteur. L'analyse de ses productions modifie rapidement cette première impression et nous oblige à rapprocher son comportement de celui de Nadine. Ils manifestent tous les deux de la nonchalance, ils ne font pas tous les exercices demandés, ils produisent des solutions incomplètes et ils ne s'approprient pas les nouveaux outils.

Christophe arrive rarement à décoder une expression algébrique écrite à l'aide des primitives préfixes et inversement. Il fait ce codage et ce décodage pas à pas. Il a tendance à faire des raisonnements de moindre généralité par exemple lorsqu'il considère la puissance deuxième comme une opération monadique. Son comportement est à l'opposé de celui de Christiane qui est attirée vers le plus général lorsqu'elle considère la racine carrée comme une opération diadique. Il n'utilise pas le diagramme de plomberie comme support à son raisonnement et ne fait pas la différence entre produit et composée de deux fonctions. La description fonctionnelle d'une procédure lui paraît inutile même s'il identifie les variables dans les problèmes issus de situations concrètes. Il affirme lors de la première entrevue qu'une variable est une inconnue et il réduit la définition d'une fonction à une nomenclature de représentations graphiques. Sur ce sujet, il ne progresse pas. Il réussit à se débrouiller pour invoquer à l'occasion une compréhension abstraite d'objets du domaine des fonctions mais ceci ne se produit pas de façon régulière.

Quant à Nadine, elle n'invoque qu'exceptionnellement une compréhension abstraite d'objets du domaine des fonctions. La lecture de la retranscription des entrevues ne permet pas de dégager une certaine compréhension des concepts en cause. Elle ne fait pas ressortir l'idée de dépendance et se contente d'imaginer un contexte qui pourrait être quantifié. En rétrospective, nous n'avons pas l'impression d'avoir fait progresser Nadine ou Christophe. Ni l'un ni l'autre ne réussit les exercices tirés des leçons-clé. Ces élèves accumulent suffisamment de points pour obtenir la note de passage à la fin de la session. L'évaluation sommative que nous appliquons vient les favoriser alors qu'ils n'ont pas maîtrisé les principaux concepts leur permettant de réussir le cours de calcul. **Ils se sont faufilés en réussissant le minimum requis**, le plus souvent avec une compréhension procédurale. **Notre mode d'évaluation demeure un problème!** D'ailleurs, Christophe et Nadine ont échoué leur cours de calcul. L'obtention de la note de passage les a-t-elle encouragés de façon implicite à conserver la même attitude de nonchalance face à l'effort à fournir dans le cours suivant?

Christophe (4110)

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Etat des connaissances	Premier sous-groupe		
Cours au secondaire	Les cours 414-434-534 sont réussis.		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes - décoder (c. proc. d. ar.)	Il n'obtient pas le résultat car il considère les trois nombres comme les opérandes de la somme.	Test lab2 Q2	
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c. abs. d. ar.)	Il considère la puissance deuxième comme une opération monadique et il écrit dans la boîte le nom de l'opérateur et le nombre qui servira au calcul. Malgré ces erreurs de représentation, il perçoit la structure globale de l'expression.	Test lab2 Q2	
- coder (c. abs. d. ar.)	Le codage est correct malgré l'ajout des parenthèses.	Test lab2 Q1	c. abs. d. ar.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Variable			
- donner une définition	*"Est un nombre qui varie selon l'équation, est une réponse d'une formule. On s'en sert pour avoir des statistiques ou bien pour calculer à l'aide d'une formule, une réponse précise."*	Etat des c. Q10	idée d'inconnue
- choisir une définition	Une variable est une quantité dont on admet, suite à un calcul ou une expérience, que sa valeur varie ou pourrait varier.	Etat des c. Q11	idée de variabilité
- donner un exemple	*"Si tu veux avoir le pourcentage des animaux dans un forêt. Ça dépend des chasseurs."*	Entrevue 1	
- utiliser la notation fonctionnelle pour une procédure (c. abs. d. al.)	Il ne peut pas donner la signification de l' entrée de la procédure.	Ex.2 Q5c)	
pour un contexte (c. abs. d. fonc.)	Il identifie correctement les variables.	Ex.2 Q1a)	c. abs. d. fonc.
pour la procédure de construction d'une fonction (c. abs. d. fonc.)	À la fin de la session, il ne peut pas donner la signification des entrées qu'il confond avec le résultat de la procédure. Il ne répond pas lorsqu'on lui demande le résultat de cette procédure.	Ex.4 Q6	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Il écrit la procédure complète sans erreur.	Ex.1 Q3b)	c. int. d. fonc.
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	Toutefois, il n'arrive pas à écrire la procédure au neuvième laboratoire. Même une fois la procédure corrigée, il ne peut pas faire tracer l'allure du graphe.	Test lab9	
- donner une définition	*"Est-ce que tu parles de graphique? La fonction linéaire, c'est un graphe."* Il trace le graphe d'une fonction constante.	Entrevue 1	graphe
- choisir une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y) qui peut être infini, dans lequel à chaque valeur de la variable x, correspond une valeur de la variable y...	Etat des c. Q7	ensemble de couples
	"Je choisis b)" (un ensemble de couples) *"...Bien dans a), ils ne disent pas dans le plan cartésien, un graphe."* ... Dans c), *"on ne parle pas de graphe."*	Entrevue 2	
- déterminer le domaine à partir de l'expression(c. proc. d. al.)	Il tient compte de la restriction en voulant déterminer pour quelles valeurs de la variable l'expression est positive ou nulle mais au moment d'isoler cette variable, il multiplie par un nombre négatif sans changer le sens de l'inégalité.	Ex.1 Q3a)	
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Il détermine le domaine correctement.	Ex.1 Q3c)	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Il l'illustre correctement.	Ex.1 Q3e)	c. abs. d. fonc.
- déterminer l'image par fog d'une valeur connue de x (c. proc. d. fonc.)	Il donne une réponse fausse écrite sous forme décimale sans aucune trace de calcul. Nous n'arrivons pas à retrouver sa réponse même en reprenant les erreurs les plus classiques.	Ex.1 Q3g)	
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	Il remplace x par c dans la ligne titre et dans la ligne expression.	Variable-fonction Q6	c. proc. d. fonc.
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc.)	Il ne peut pas le déterminer. Il peut commencer le raisonnement en écrivant que l'image de la première fonction doit appartenir au domaine de la seconde mais il se perd dans les manipulations algébriques qui suivent.	Ex.1 Q3f)	
- différencier le produit et la composée de deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	*"Pour la composée, tu mets $f_1 = f_2$ et tu isoles x."*	Entrevue 2	
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c. abs. d. fonc.)	Il utilise la sous-procédure avec la bonne idée, toutefois, il oublie de noter l'entrée associée à cette sous-procédure. Nous pouvons penser que cette erreur aurait été corrigée s'il avait pu tester sa procédure avec l'ordinateur.	Variable-fonction Q9	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation			
- reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)	Il reconnaît le modèle et calcule correctement.	Ex.2 Q1	c.abs. d. fonc.
- reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)	Il reconnaît le modèle, calcule correctement mais ne peut pas tracer l'allure du graphe. Il relie deux points par un segment de droite.	Ex.2 Q2	
- choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)	*"Le plus facile, c'est quand ils donnent les statisiques. Chaque année, tu as en 1986 tant et en 1987 autre chose. Tu peux faire une fonction linéaire. Ils doivent donner les résultats de chaque année."*	Entrevue 2	
- choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)	Il reconnaît le modèle mais il ne peut pas établir l'expression. Une fois de plus il donne une droite de pente négative comme représentation graphique.	Entrevue 3	
Note finale en 302	66%		
Cours de mathématique suivis par la suite	Calcul 1 (H-91) 42%		
Cours de comptabilité	Comptabilité 1 (A-90) 71% Comptabilité 2 (H-91) 61%		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Nadine (4109)

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Etat des connaissances	Deuxième sous-groupe		
Cours au secondaire	Elle a échoué le cours 534 Elle a échoué le cours 302 du collégial		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes - décoder (c. proc. d. ar.)	Elle obtient le bon résultat.	Test.lab2.Q2	c. proc. d. ar.
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c. abs. d. ar.)	Elle peut représenter une opération et enchaîner quelques opérations. Toutefois elle considère puissance comme une opération monadique.	Test.lab2.Q2	
- coder (c. abs. d. ar.)	Elle traite l'opposé comme une différence.	Test.lab2.Q1	
Variable			
- donner une définition	*"C'est un nombre qu'on met pour trouver la réponse. C'est un ensemble solution."*	Etat des c. Q10	idée de calcul
- choisir une définition	Un variable est une quantité dont on admet suite à un calcul ou une expérience que sa valeur varie ou pourrait varier.	Etat des c. Q11	idée de variabilité
- donner un exemple	Elle ne fait resortir aucun lien fonctionnel. *"Si je prends un budget"..."Le montant d'argent pour l'épicerie."*	Entrevue 1	
- utiliser la notation fonctionnelle pour une procédure (c. abs. d. al.)	Elle peut donner la nature de l'entrée mais elle ne peut pas préciser sa signification.	Ex.2 Q5	
pour un contexte (c. abs. d. fonc.)	Elle identifie les variables correctement mais les utilise à l'envers.	Ex.2 Q1	
pour la procédure de construction d'une fonction (c. abs. d. fonc.)	À la fin de la session, elle peut expliquer le processus pour la procédure de construction.	Ex.4 Q6	c. abs. d. fonc.

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Elle écrit seulement l'expression algébrique codée à l'aide des primitives préfixes.	Ex.1 Q1b)	
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	Au neuvième laboratoire, elle code la procédure correctement et utilise le traceur. Toutefois elle restreint le domaine car elle refuse l'existence de $\sqrt{0}$	Test lab9	
- donner une définition	*"Une fonction c'est $f(x) = 2x^2 + 2x$."*	Entrevue 1	
- choisir une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y) qui peut être infini, dans lequel à chaque valeur de la variable de x, correspond une valeur de la variable y.	Etat des c. Q7	ensemble de couples
	Une fonction est un ensemble de couples... *"car je remplace x par un chiffre et j'obtiens y. J'aurai un couple et je pourrai le mettre sur un gaphe."*	Entrevue 2	
- déterminer le domaine à partir de l'expression (c. proc. d. fonc.)	Elle peut énoncer les restrictions mais dans le cas d'une racine paire, elle ne complète pas les calculs pour résoudre l'inéquation.	Ex.1 Q1a)	
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Elle réussit à faire l'intersection des deux domaines mais elle ne tient pas compte des zéros de la fonction diviseur.	Ex.1 Q1d)	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Elle peut produire le diagramme.	Ex.1 Q1e)	c. proc. d. fonc.
- déterminer l'image de fog d'une valeur connue de x (c. proc. d. fonc.)	Elle donne la bonne réponse.	Ex.1 Q1g)	c. proc. d. fonc.
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	Elle remplace x par t dans la ligne titre et dans la ligne expression.	Variable-fonction Q6	c. proc. d. fonc.
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc)	Elle donne l'intersection des deux domaines.	Ex.1 Q1f)	
- différencier le produit et la composée de deux fonctions.(c.abs. d. fonc.)	Pour le produit, elle propose de multiplier les deux expressions. Pour la composée, elle ne sait pas.	Entrevue 2	
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c.abs. d. fonc.)	Elle ne peut pas écrire cette procédure.	Variable-fonction Q9	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation			
- reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle mais n'attibue pas les bonnes valeurs aux paramètres.	Ex.2 Q1	
- reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît le modèle sans réussir sès calculs. Elle ne peut pas donner l'allure du graphe.	Ex.2 Q2	
- choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)	*"Premièrement il faut des chiffres dans l'article."* ...*"Ensuite il faut un point de départ. Supposons en telle année, il y a 100 000 et dix ans plus tard, il y en aura combien?"*	Entrevue 2	
- choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)	La diminution de 2% lui fait dire qu'elle devrait calculer 1000 -2%. Comment le calculer? Voilà la question! Elle dira: *"Je ne suis pas bonne en calcul mental."* Elle essaie avec une calculatrice mais elle abandonne avant d'obtenir une réponse. *"Je ne sais pas , ça va donner un chiffre." Nous lui demandons si elle pourrait établir une formule. Elle propose A - b^x* "qui est un modèle exponentiel décroissant" où A est 1000 et b est 2%. Comme représentation graphique, elle propose une courbe concave vers le bas décroissante qui coupe l'axe des x.	Entrevue 3	
Note finale en 302	63% en reprise		
Cours de mathématiques suivis par la suite	comp. de math. (H-90) 46% calcul 1 (H-91) 33% statistique (A-91) 68%		
Cours de comptabilité	comptabilité 1 (A-89) 75% comptabilité 2 (H-91) 53% comptabilité 2 (A-91) 62%		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

7.1.4 Anne et Marc partent perdants mais pourraient finir par réussir

Marc et Anne, dont la session est décrite aux tableaux XXVIII et XXIX, entreprennent la session avec un dossier scolaire semblable. Ils possèdent des connaissances instables en arithmétique qui deviennent un handicap sérieux pour aborder le domaine de l'algèbre.

Pourtant, très rapidement, les différences entre ces deux élèves apparaissent. Marc est peu motivé bien qu'il dise vouloir se mettre au travail. Il ne réussit pas à travailler. Il investit peu de temps et d'efforts en dehors des heures de cours. Les progrès sont presqu'inexistants. Il n'invoque qu'à de rares occasions une compréhension abstraite. Pour les fonctions, il tente de tout représenter par une droite. La stratégie didactique proposée ne le touche pas et les effets en sont imperceptibles. Il avoue vouloir changer d'orientation à l'hiver. Il vise même le programme fortement contingenté de techniques policières. Manque-t-il de réalisme? Il a effectivement fait une demande d'admission dans ce programme. Toutefois, le nombre élevé d'échecs à son dossier l'oblige à quitter le collège. Il entreprend un cours professionnel de niveau secondaire et il se dit plus heureux "loin des chiffres et de la théorie".

Par contre, Anne est une élève assidue qui fait ses exercices et maintient ses efforts jusqu'à la fin. Elle parle peu et ne demande pas d'aide. Elle considère la variable comme une boîte pouvant contenir des nombres et ces nombres seront déterminés à l'aide d'une fonction. Cette conception la confine à l'aspect opératoire des problèmes rencontrés. Elle ne peut pas percevoir la pertinence d'identifier des variables encore moins de différencier variable et fonction. Elle n'invoque qu'exceptionnellement une compréhension abstraite, plus souvent en arithmétique qu'en algèbre. Les limites de temps ne nous ont pas permis de la voir progresser au point de réussir un plus grand nombre d'exercices exigeant une compréhension abstraite. L'accumulation de ses difficultés ne lui permet pas d'obtenir la note de passage à ce cours de pré-calcul. Sa persévérance la pousse à entreprendre le premier cours de calcul qu'elle réussit au deuxième essai. L'année suivante, elle se réinscrit au cours de pré-calcul donné par les mêmes professeurs utilisant les mêmes situations didactiques et le réussit. Aurait-elle finalement atteint une compréhension abstraite des fonctions?

Anne (4109)

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Etat des connaissances	Troisième sous-groupe		
Cours au secondaire	Le cours 534 est échoué.		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes - décoder (c.proc. d. ar.)	Elle peut produire un résultat.	Test lab2 Q2	c. proc. d. ar.
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c.abs. d. ar.)	Elle trace une communication entre deux boîtes sans que cela ne corresponde à un transfert de résultat.	Test lab2 Q2	
- coder (c.abs. d. ar.)	Le codage est réussi.	Test lab2 Q1	c. abs. d. ar.
Variable - donner une définition	*"Une variable peut contenir une quantité infinie de nombres. On peut définir ces nombres seulement à l'aide d'une fonction."*	Etat des c. Q10	idée de domaine
- choisir une définition	Tout symbole dont la valeur n'est pas déterminée est appelé variable.	Etat des c. Q11	idée d'inconnue
- donner un exemple	Elle donne l'expression d'une fonction pour en déterminer le domaine.	Entrevue 1	idée de domaine
- utiliser la notation fonctionnelle: pour une procédure (c. abs. d. al.)	Elle ne donne pas de signification aux variables.	Ex.2 Q5a)	
pour un contexte (c. abs. d. fonc.)	Elle n'identifie pas les variables.	Ex.2 Q1a)	
pour la procédure de construction d'une fonction (c. abs. d. fonc.)	Elle ne décrit pas les entrées ni l'effet de la procédure. Elle se contente de coder la procédure.	Lab.10 et 11	
	Au dernier examen, elle ne peut décrire que la partie des listes-expressions du processus complet de construction.	Ex.4 Q6	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Elle code l'expression algébrique sans erreur mais elle n'écrit pas la procédure.	Ex.1 Q1b)	c. int. d. fonc.
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	Pus tard, elle peut écrire la procédure correspondant à une fonction correctement. Par contre, elle donne un graphe incomplet même en utilisant le traceur.	Test lab9	c. proc. d. fonc.
- donner une définition	*Je disais $f(x) = x^2/(4-x)$* Elle donne une expression algébrique, parle de façon générale du graphe sagittal, du graphe cartésien. *Il faut que la flèche parte de nombres différents sinon ce n'est pas une fonction.*	Entrevue 1	ensemble de couples
- choisir une définition	Elle choisit l'ensemble de couples, à chaque valeur de x correspond une valeur de y.	Etat des c. Q7	unicité de l'image
	Elle choisit une fonction est une relation entre deux ensembles. À chaque élément de l'ensemble de départ est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée. Elle ajoute *"je ne comprends pas le rapport de deux ensembles."*	Entrevue 2	ensemble de couples
- déterminer le domaine à partir de l'expression (c. proc. d. al.)	Elle peut déterminer le domaine en justifiant.	Ex.1 Q1a)	c. proc. d. al.
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Elle ne réussit pas car elle ne tient pas compte des zéros de la fonction diviseur.	Ex.1 Q1d)	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Elle trace le diagramme correctement. Par la suite, elle explique le processus difficilement.	Ex.1 Q1e) Entrevue 2	c. proc. d. fonc.
- déterminer l'image par fog d'une valeur connue de x.(c. proc. d. fonc.)	Elle ne remplace pas tous les x de f par g(x). Ele n'arrive pas à trouver l'image.	Ex.1 Q1g)	
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	Elle remplace x par t dans la ligne titre et dans la ligne expression.	Variable-fonction Q6	
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc.)	Elle ne peut pas déterminer le domaine. Elle fait l'intersection des deux domaines même si elle énonce que l'image de g doit être dans le domaine de f. De plus elle essaie de déterminer l'expression algébrique en écrivant $C(x) = f(g(x))$ $= f(\sqrt{5 - 2x}))$ $= \frac{3x(\sqrt{5-2x}) - 2}{1 - x}$	Ex.1 Q1f)	
- différencier le produit et la composée de deux fonctions. (c.abs. d. fonc.)	Elle explique bien la différence entre les deux opérations.	Entrevue 2	c. abs. d. fonc.
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c.abs. d. fonc.)	Elle utilise la sous-procédure mais son choix ne lui permet pas d'obtenir le résultat attendu.	Variable-fonction Q9	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation - reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)	Le modèle est reconnu mais elle calcule la pente dans le système (coût,production) et elle calcule l'ordonnée à l'origine dans le système (production,coût).	Ex.2 Q1	
- reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)	Le modèle est reconnu. Elle donne $f(x) = A^{bx}$ comme expression algébrique. Elle attribue la bonne valeur pour l'ordonnée à l'origine mais elle ne peut pas déterminer la valeur de la base. Elle essaie d'utiliser des valeurs prises directement dans l'énoncé.	Ex.2 Q2	
- choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)	Elle choisit un article où le temps est considéré comme la variable indépendante. *J'ai remarqué les années. Supposons en telle année les avocats faisaient tel salaire puis dix ans plus tard, ils étaient rendus à tel salaire. Donc, j'ai su qu'il y avait une fonction car à chaque année, ça varie.*	Entrevue 2	
- choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)	Elle reconnaît que le phénomène se modélise par une décroissance exponentielle après avoir essayé de calculer avec un modèle linéaire. Elle rencontre des difficultés pour calculer 2% de 1000. *Le calcul mental, là.* Elle ne peut pas tracer l'allure du graphe.et avoue qu'elle *mélange logarithme et exponentielle.*	Entrevue 3	
Note finale en 302 (A-90)	54%		
Cours de mathématiques suivis par la suite	Calcul 1 (H-91) abandon Calcul 1 (E-91) 69% Complément de math. 302 (A-91) 70%		
Cours de comptabilité	Comptabilité 1 (A-90) 68% Comptabilité 2 (H-91) 60%		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Marc (4111)

Tâche et intention	**Production**	**Occasion**	**Palier et domaine**
Etat des connaissances	Quatrième sous-groupe		
Cours au secondaire	Les cours 414-434-534 sont réussis.		
Expression arithmétique écrite avec les primitives préfixes			
- décoder (c. proc. d. ar.)	Il ne donne pas de résultat. Il ne peut pas décoder.	Test lab2 Q2	
- illustrer à l'aide d'un diagramme de plomberie (c. abs. d. ar.)	Il ne peut même pas représenter l'opération somme. Il confond opérandes et opérateur.	Test lab2 Q2	
- coder (c. abs. d. ar.)	Il peut coder une bonne partie, mais il contourne les difficultés en oubliant l'opposé.	Test lab2 Q1	
Variable			
- donner une définition	*"C'est une lettre qu'on met à la placed'un chiffre dans une équation, ce qui nous permet de trouver plusieurs autres chiffres."*	Etat des c. Q10	idée d'inconnue
- choisir une définition	Les variables ont deux utilités: elles permettent d'établir des lois lorsque la solution est exprimée à l'aide de variables, elle donne le résultat....	Etat des c. Q11	généralité
- donner un exemple	*"x=2y. si x=41, y=21, bien 20,5 car 2(20,5)=41 Ça remplace le chiffre."*	Entrevue 1	idée d'inconnue
- utiliser la notation fonctionnelle pour une procédure (c. abs. d. al.)	Il ne répond pas à la question.	Ex.2 Q6	
pour un contexte (c. abs. d. fonc.)	Il identifie correctement les variables.	Ex.2 Q1	c. abs. d. fonc.
pour la procédure de construction d'une fonction (c. abs. d. fonc.)	Au dernier examen, il semble confondre entrée et procédure. Ses réponses sont incohérentes, il semble vraiment répondre au hasard.	Ex.4 Q6	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Fonction			
- écrire la procédure correspondante (c. int. d. fonc.)	Il écrit une procédure qui ne tournerait pas. Il répète le codage de l'opérateur somme en utilisant à la fois le mot et le symbole.	Ex.1 Q3b)	
- utiliser le traceur (c. proc. d. fonc.)	Au neuvième laboratoire, il ne peut pas écrire la procédure. Une fois la procédure écrite avec de l'aide, il ne peut pas faire tracer le graphe.	Test lab9	
- donner une définition	*"Une fonction c'est un peu comme une variable car une variable va dans une fonction. C'est pour vous aider à calculer."* *"Supposons qu'on veut déterminer le nombre de personnes qui entrent dans un avion. On peut faire une fonction du nombre de sièges. Une fois la fonction déterminée, on peut mettre 2 dans la variable puis calculer la fonction. Tu peux mettre 4 ou 6. Ça va calculer n'importe quel chiffre."*	Entrevue 1	calcul
- choisir une définition	Une fonction est un ensemble de couples (x,y) qui peut être infini, dans lequel à chaque valeur de la variable x, correspond une valeur de la variable y.	Etat des c. Q7	ensemble de couples
	Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y. *"Quand tu dis x=my. Pour trouver y, il faut multiplier par m." ... "Ce n'est pas juste un ensemble de points comme ils le disent en b) ou en c)."*	Entrevue 2	calcul
- déterminer le domaine à partir de l'expression (c. proc. d. al.)	Il peut le déterminer.	Ex.1 Q3a)	c. proc. d. al.
- déterminer le domaine de la fonction résultant d'une opération (+ , -, *, /) sur deux fonctions (c. abs. d. fonc.)	Il ne le détermine pas. Il énonce les conditions sans pouvoir s'en servir.	Ex.1 Q3d)	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Composition de deux fonctions			
- illustrer à l'aide du diagramme de plomberie (c. proc. d. fonc.)	Il peut reproduire le diagramme de plomberie.	Ex.1 Q3e)	c. proc. d. fonc.
- déterminer l'image de fog d'une valeur connue de x. (c. proc. d. fonc.)	Il obtient la bonne réponse.	Ex1 Q3g)	c. proc. d. fonc.
- écrire une procédure équivalente par changement de variable (c. proc. d. fonc.)	À la question, pouvez-vous écrire une procédure équivalente..., il répond oui sans rien ajouter.	Variable-fonction Q6	
- déterminer le domaine de f(g(x)) (c. abs. d. fonc.)	Il ne le détermine pas.	Ex.1 Q3f)	
- différencier le produit et la composée de deux fonctions. (c.abs. d. fonc.)	*"Pour le produit, on multiplie les deux fonctions ensemble. Ça va donner juste une. Pour la composée, je ne sais pas. Je vais dire que tu les additionnes ensemble. Ça va t'en donner une seule."*	Entrevue 2	
- écrire une nouvelle procédure utilisant une sous-procédure (c. abs. d. fonc.)	Il n'utilise pas la sous-procédure mais il écrit une procédure qui donnerait le résultat attendu.	Variable-fonction Q9	

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

Tâche et intention	Production	Occasion	Palier et domaine
Modélisation			
- **reconnaître le modèle linéaire (c. abs. d. fonc.)**	Il reconnaît le modèle et attribue les bonnes valeurs aux paramètres.	Ex.2 Q1	c. abs. d. fonc.
- **reconnaître le modèle exponentiel (c. abs. d. fonc.)**	Il reconnaît le modèle mais il n'arrive pas à attribuer des valeurs aux paramètres.	Ex.2 Q2	
- **choisir une situation pouvant être modélisée par un lien fonctionnel (c. abs. d. fonc.)**	*"J'ai pris la profondeur de l'eau par rapport à la pression." ... "Plus tu descends plus la pression est forte"*	Entrevue 2	
- **choisir le modèle adéquat (c. abs. d. fonc.)**	Il ne reconnaît pas le modèle. Il veut utiliser le modèle linéaire. Il revient à l'idée de diminution constante mais il ne peut rien formuler pour décrire tous les couples.		
Note finale en 302	46%		
Cours de mathématiques suivis par la suite	Statistiques (H-91) 30%		
Cours de comptabilité	Comptabilité 1 (A-90) abandon Il n'a pas suivi de cours au collège à l'automne 91. Il avait fait une demande d'admission en techniques policières mais à l'hiver 91, il a échoué plus de 4 cours. Aussi, il a décidé de prendre un cours de "métier" en réfrigération au Centre vingt-quatre juin.		

Abréviations utilisées: c. int.= compréhension intuitive; c. proc.= compréhension procédurale; c. abs.=compréhension abstraite; d. ar.=domaine de l'arithmétique; d. al.=domaine de l'algèbre; d. fonc.=domaine des fonctions; d. op.= domaine des opérateurs

7.2 Le palier d'abstraction requis pour les cours de pré-calcul et de calcul

La lecture des tableaux fait ressortir l'originalité individuelle tout en laissant un voile sur les ressemblances. Aussi, nous avons résumé dans le tableau XXX le degré de réussite des neuf élèves observés sur les leçons-clé et les résultats aux cours de pré-calcul et de calcul. En fin de session, nous avons constaté que le rendement au questionnaire "Etat des connaissances" n'apportait pratiquement aucune information quant à la performance finale. Nous ne reprenons pas le premier classement dans le tableau XXX et nous insistons sur le caractère non-prédictif de ce questionnaire. La motivation personnelle, l'implication et l'énergie qui se manifesteront en cours de session, demeurent des éléments essentiels qui sont difficilement perceptibles dès la première heure de cours. Le rendement aux différents exercices reliés aux leçons-clé apparaît beaucoup plus significatif et nous reprenons les observations dans ce qui suit.

Première leçon-clé	Seconde leçon-clé	Troisième leçon-clé	Pré-calcul	Calcul
Nicole	Nicole	Nicole	98	97
Christiane	Christiane	Christiane	88	90
Francis	Éliane	Francis	84	76
Éliane	Carole	Éliane	79	74
Carole	Francis	Carole	70	60
Christophe	Christophe	Christophe	66	42
Nadine	Nadine	Nadine	63	33
Anne	Anne	Anne	54	Ab
Marc	Marc	Marc	46	X

Tableau XXX. Cheminement des 9 élèves observés sur les leçons-clé.

Pour la première leçon-clé, qui porte sur la représentation d'une fonction par une procédure, on distingue les élèves qui réussissent cet exercice de façon stable et les autres (tableau XVIII).

Pour la seconde leçon-clé, qui porte sur les opérations sur les fonctions, on distingue aussi deux catégories d'élèves. Dans la première, nous trouvons ceux qui ont une bonne connaissance de la composition, qui sont capables de la distinguer de la multiplication et qui ont un début de méthode de détermination du domaine du quotient de deux fonctions. Les élèves de la seconde sont ceux qui peuvent calculer f(g(a)), a étant donné, et tracer un diagramme de plomberie de la composée de deux fonctions. Ils n'expliquent pas la différence entre le produit et la composée de deux fonctions et ne déterminent pas le domaine du quotient. Le cas de Francis n'est pas clair (tableau XIX).

Pour la troisième leçon-clé, qui porte sur la comparaison des modèles linéaire et exponentiel, on distingue trois catégories d'élèves. Dans la première, nous trouvons ceux qui ont une conception riche des concepts de variable et de fonction et réussissent à établir et utiliser un modèle linéaire ou exponentiel, selon le besoin. Les élèves de la seconde sont ceux qui ont une conception moins riche des concepts de variable et de fonction. Ils ne réussissent que partiellement à établir et utiliser un modèle linéaire alors qu'ils semblent mieux maîtriser le modèle exponentiel. Enfin, dans la troisième catégorie on retrouve les élèves qui ont une conception pauvre des concepts de variable et de fonction ce qui ne leur permet pas du tout de travailler avec le modèle exponentiel. Parmi eux, ceux qui travaillent avec le modèle linéaire ne situent pas leur travail dans le cadre plus vaste de la représentation d'un phénomène par un modèle fonctionnel (tableau XXX).

Ce tableau-synthèse nous permet d'identifier à travers les étapes importantes du cours, une certaine persistance des comportements face au palier de compréhension invoqué. Nous n'observons pas chez les élèves une très grande évolution des capacités d'abstraction, ce qui pourrait s'expliquer par la relative brièveté de la session.

7.2.1 Les capacités initiales d'abstraction

Les élèves qui réussissent la représentation d'une fonction par une procédure de façon stable (première leçon-clé), ont démontré dès le début de leurs études collégiales une compréhension abstraite d'objets arithmétiques (diagramme de plomberie d'une expression arithmétique). Ils continuent d'évoquer régulièrement des connaissances abstraites et évoluent sans difficultés majeures d'un domaine à l'autre.

7.2.2 Les déstabilisations occasionnées par les changements de domaines

Parmi ces élèves capables de travailler avec des connaissances abstraites, on peut observer deux types de réactions aux changements de domaines conceptuels. Pour certains, il n'y a pas de déstabilisation, la restructuration se fait en douceur. Nous pensons que les aménagements que ces élèves doivent apporter à la structure de leurs connaissances pour accueillir et intégrer les éléments nouveaux sont des changements mineurs, la structure étant déjà prête. On peut imaginer que certaines activités leur ont permis d'ouvrir des champs de validité pour les questions abordées et de préparer le terrain. Nicole et Christiane semblent ainsi accueillir sans heurts les connaissances des divers domaines.

D'autres élèves sont déstabilisés par les changements de domaine, ils ne vivent pas immédiatement les conflits cognitifs entre connaissance ancienne et connaissance nouvelle. Ils peuvent mettre un certain temps à réorganiser la structure de leurs connaissances et pendant cette réorganisation il leur arrive de fonctionner à un palier inférieur. Ainsi Francis, Eliane et Carole naviguent, selon le domaine abordé, d'un palier d'abstraction à un autre. Prenons l'exemple de Francis. Il traite de façon particulièrement intéressante car très personnelle le diagramme de plomberie (figure 24 dans 6.1.2), démontrant qu'il est très à l'aise avec les objets arithmétiques et qu'il en a développé une compréhension abstraite. Par contre, quand on lui demande de travailler dans le domaine des fonctions, il perd son assurance et n'arrive plus à rappeler de façon efficace ses connaissances. On voit bien ce phénomène sur la détermination du domaine de la fonction quotient de deux fonctions données. Bien qu'il sache qu'une division par 0 n'a pas de résultat réel et qu'il se serve de cette propriété pour déterminer le domaine d'un quotient donné explicitement, il ne réussit pas à refaire le même raisonnement sur le quotient de deux fonctions. Le premier raisonnement est de type arithmétique (pas de division par 0), appliqué à des objets algébriques (le dénominateur 1-x doit être différent de 0, or 1-x=0 pour x=1, donc dom $g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$). Ce même raisonnement, Francis ne le fait pas sur des objets fonctionnels. Il mettra un certain temps à faire ce changement de domaine conceptuel et le fera en partie sur la composition des fonctions, c'est-à-dire sur la dernière opération rencontrée. On peut se demander si c'est l'effet du temps didactique ou le fait que la composition mette en jeu la fonctionnalité qui l'a aidé.. Par la suite, au moment de la comparaison entre le modèle linéaire et le modèle exponentiel, il aura repris pied dans des connaissances abstraites.

Il y a lieu de se demander si la stabilité dont font preuve Christiane et Nicole n'est pas due au fait qu'elles seraient rendues à se construire des connaissances formelles. Il aurait été souhaitable de vérifier si elles n'auraient pas le même comportement que Francis, mais au palier d'abstraction supérieur. Nous n'avons pas assez de données et notre cadre conceptuel n'est pas assez solide pour le faire.

7.2.3 Les exigences du cours de pré-calcul

Dans le cours de pré-calcul, beaucoup d'exercices font intervenir des connaissances procédurales des différents domaines et il y en a peu qui portent sur la connaissance d'objets du domaine des opérateurs de fonctions. Nous pensons que ces limites rendent le cours relativement facile à réussir et que cela explique la réussite de Christophe et Nadine qui échouent par la suite le cours de calcul.

Il ressort clairement que l'élève qui invoque régulièrement une compréhension abstraite des objets algébriques ou fonctionnels tire profit des activités proposées et réussit son premier cours de calcul. Par ailleurs, pour réussir le cours de calcul il faut atteindre régulièrement le palier abstrait et réussir à passer d'un domaine à l'autre. En effet, **ceux qui n'invoquent pas systématiquement cette compréhension abstraite sur le domaine fonctionnel ne réussissent pas le cours de calcul**. Comment les aider? Nous avons identifié les exercices exigeant une compréhension abstraite et nous devons trouver des stratégies pour amener l'élève à atteindre ce palier d'abstraction. Nous en avons proposées quelques unes mais la tâche est encore vaste.

7.3 La spécificité de l'ordre collégial dans l'ensemble de la formation mathématique

Nous mentionnions plus tôt que la formation des élèves en algèbre n'est pas terminée à la sortie du secondaire et nous suggérions que le rôle du collégial était de revisiter ces connaissances sous un autre angle. En fait, nous pensons que la spécificité de l'ordre collégial pourrait être de travailler systématiquement au palier abstrait.

En ce qui concerne la trame conceptuelle de la suite arithmétique-algèbre-fonctions-calcul différentiel et intégral-analyse et topologie, le rôle du collégial pourrait être d'avancer dans le domaine des fonctions et du calcul, tout en réorganisant les couches plus profondes de l'arithmétique et de l'algèbre.

Les nombreux changements de programmes actuellement en cours au collégial pourraient être des occasions de faire une discussion autour de ces sujets au sein de la discipline et avec les disciplines de spécialité. Si on pouvait rendre explicite le contrat didactique assumé par les enseignants de mathématiques, à la fois vis-à-vis des élèves et vis-à-vis des collègues, on disposerait de bases de discussion de ce contrat. Cela permettrait d'harmoniser les exigences des différents cours et de produire des matériels didactiques ayant une certaine cohérence.

Nous avons souligné à la section 7.2.2 qu'une des faiblesses de notre modèle était le manque de définition précise de ce que pourrait être la compréhension formelle. Nous disposons pourtant de certaines questions qui nous semblent appeler une compréhension qui va au-delà de la conceptualisation. Par exemple, dans le troisième laboratoire, nous voulions ouvrir à une formulation personnelle du mode de représentation choisi pour les fonctions et pour les variables.

> *1. Expliquez dans vos propres termes*
> *a) comment en Logo on définit une fonction,*
> *b) comment en Logo on donne une valeur à la variable pour obtenir l'image de cette valeur.*

Or, la plupart des élèves ont fourni une réponse au plus bas niveau possible en décrivant la suite de manipulations à faire:

Entrer dans l'éditeur, écrire une définition qui commence par POUR et qui finit par FIN.

Nous sommes convaincues qu'il faut se soucier de proposer aux élèves des exercices demandant ce niveau de compréhension, quitte à admettre que tous ne réussiront pas à donner des réponses satisfaisantes. À notre avis l'enseignement doit proposer aux meilleurs élèves des occasions de restructurations qui soient situées là où ils sont rendus dans leur développement. On ne peut pas les laisser stagner. Le peu de place accordée aux exercices exigeant une compréhension qui va au-delà de la conceptualisation, et qui pourrait être appelée formelle, se révèle être une lacune importante de notre séquence didactique.

Nous avons besoin d'une définition plus précise de ce que pourrait être cette compréhension. Peut-on penser que ce degré de compréhension pourrait être la spécificité de l'ordre universitaire? Si c'est le cas, est-ce conjointement avec les enseignants de cet ordre que nous devrions faire des essais de définition? Nous voudrions en effet éviter des confusions qui se produisent parfois entre secondaire et collégial. Certains élèves venant de classes plus avancées du secondaire arrivent au collégial tout fiers "d'avoir commencé le collégial et de savoir dériver". Vérification faite, ils connaissent la procédure de dérivation des polynônes. Nous prétendons qu'ils ont étendu leurs connaissances du secondaire à la dérivation mais qu'ils n'ont pas, comme ils le pensent, "commencé le collégial".

Afin de poursuivre la structuration des connaissances, nous prévoyons des rencontres en groupe-classe, dont le rôle serait d'institutionnaliser le savoir qui a été bâti individuellement. Nous pourrions à cette occasion nous entendre avec les élèves sur les notations adoptées par la communauté scientifique, discuter de techniques de preuves, du degré de certitude des résultats, ouvrir des discussions sur le nombre de solutions selon la valeur des paramètres, sur les cas limites, sur la dégénérescence des solutions, reprendre des rédactions de conclusions à la suite d'un travail de modélisation etc... Il serait possible aussi d'ajouter des exercices de ce type dans le cahier de notes de cours. Ces sujets nous paraissent pouvoir ouvrir, pour les élèves qui travaillent toujours au palier abstrait, la voie vers une réflexion qui irait au-delà de la conceptualisation, sans toutefois perdre ceux qui ne travaillent à ce palier qu'occasionnellement. Il nous semble en effet essentiel de ne pas sous-alimenter les élèves les plus avancés et de leur proposer à eux aussi des défis. Or ces défis pourraient bien se trouver du côté de la compréhension formelle.

Nous avons rejeté le formalisme vide de sens et voilà que nous constatons l'importance du formalisme une fois ce sens retrouvé. Ressurgirait-il en bout de course?

Conclusion

1 Les résultats de l'étude

Cette étude a permis de répondre à plusieurs questions. Certaines portent sur l'identification du savoir enseigné, d'autres font ressortir les temps forts de notre enseignement, d'autres enfin concernent le cheminement des élèves et le rôle de l'ordre collégial dans ce cheminement.

1.1 Le savoir

Les concepts de variable et de fonction se développent historiquement en toile de fond et servent de substrat au développement d'autres connaissances plus pointues. Ils forment un tout conceptuel, l'un étant une restructuration de l'autre, en particulier dans le cadre de la modélisation de situations issues du monde physique. On ne peut les comprendre que si on les envisage dans un contexte conceptuel plus large dans lequel on retrouve les sous-concepts d'image d'une valeur de la variable, d'image de la fonction et de domaine.

Les représentations ont évolué en même temps que les concepts représentés. Elles furent à la fois tributaires des connaissances et moteur de leur avancement. Citons entre autres la table de valeurs, l'expression algébrique et le graphe cartésien. On doit toutefois faire ici une mise en garde. Il semble facile de confondre l'objet et sa représentation et d'enseigner l'une pour l'autre. Une telle substitution d'objet ne nous semble pas souhaitable.

Pour la question du choix de la définition à enseigner, nous avons montré que la définition ensembliste est issue de considérations sur la cardinalité de l'ensemble des discontinuités de fonctions pathologiques, contexte dont la complexité n'est pas à la portée des élèves du collégial. Par ailleurs, la formulation de cette définition ensembliste ne prend son sens qu'à partir des exemples et des contre-exemples qu'on en donne. Or, l'exemple des fonctions constantes va à l'encontre de l'idée de variabilité et celui de la fonction identité contredit l'idée de transformation. Il nous paraît important de choisir les exemples en s'éloignant le plus possible de ces cas limites ou à tout le moins d'en reporter l'étude après celle d'autres fonctions. Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles simples, les fonctions trigonométriques et exponentielles, qui sont couramment utilisées par le physicien, le chimiste et le sociologue, nous semblent avoir de bonnes capacités d'illustration des propriétés les plus importantes.

1.2 Les temps forts de l'enseignement

Nous avons identifié trois leçons-clé qui portent respectivement sur la représentation des fonctions, les opérations sur les fonctions et la comparaison des modèles linéaire et exponentiel. Il est clair qu'elles l'ont été dans un certain contexte et que leur contenu est largement dépendant de l'approche utilisée. Toutefois, quelque soit l'approche, il y a dans ces leçons des éléments qui nous semblent obliger l'élève à faire des sauts conceptuels et c'est la raison pour laquelle ils devraient figurer dans tout enseignement d'un cours de pré-calcul.

Nous pensons à la distinction entre une fonction et son expression algébrique, distinction qui assure le passage du procédural (une fonction est une règle de calcul) à l'abstrait (une fonction est une relation entre deux variables qui vérifie la condition d'unicité de l'image, et qui est parfois définie par une expression algébrique). Cela suppose une maîtrise du sens de l'expression algébrique et en particulier du sens et de l'utilisation de l'écriture fonctionnelle «f(x) = une expression en x».

Nous considérons aussi la capacité de générer de nouvelles fonctions à partir de deux fonctions données en les combinant à l'aide d'opérations. Certaines opérations sont induites par les opérations existant dans l'ensemble image des fonctions considérées, c'est le cas des opérations algébriques pour les fonctions à valeurs réelles. Quant à elle, la composition n'est pas liée à la nature des ensembles utilisés mais tient de la fonctionnalité. C'est d'ailleurs de cette propriété que lui vient sa puissance comme facteur de compréhension du concept de fonction.

La maîtrise de ces opérations ne sera complète que si on est capable de traiter des sous-concepts, et en particulier du domaine, à propos de la fonction résultat de l'opération.

Notre étude a fait ressortir aussi l'importance de la capacité de déterminer à partir de quelles opérations et de quelles fonctions on peut obtenir une fonction donnée. Cet exercice de déterminer la structure d'une fonction et ses composantes est rarement demandé, autant dans notre séquence que dans d'autres plus traditionnelles. Il nous semble important de s'y attarder davantage.

Enfin, nous pensons qu'il faut développer chez les élèves la capacité d'utiliser des fonctions pour décrire des phénomènes issus du monde physique. Ceci inclut le choix des variables, le choix d'un modèle fonctionnel et doit être à notre sens inséré dans le cadre général de la représentation par un modèle plutôt que présenté comme de simples applications de la théorie. À cette occasion, les fonctions changent de registre, passant de celui d'objet d'apprentissage à celui d'outil d'apprentissage.

1.3 Le cheminement des élèves

Nous avons explicité les intentions des activités d'apprentissage et la façon dont nous les gérons au jour le jour dans le but d'amener les élèves à travailler le plus régulièrement possible au palier abstrait. Nous ne saurions trop insister sur la responsabilité qui revient à l'élève de faire siennes les questions que nous lui soumettons et d'y répondre de façon personnelle. C'est un des postulats de base de notre enseignement. Dans la mesure où nous pensons que c'est l'élève qui construit ses connaissances par une suite de restructurations, il nous semble important d'insister pour qu'il verbalise la structure qu'il met sur ses connaissances. Comme l'enseignant qui conçoit une séquence didactique recrée une genèse du savoir, l'élève qui apprend est confronté au défi de bâtir une trame conceptuelle dont la solidité assurera un apprentissage de qualité.

Quant aux espoirs pour chacun de réussir le cours de pré-calcul et le cours de calcul, nous voudrions rappeler que ceux qui travaillent systématiquement au palier abstrait avancent vite et bien dans leur apprentissage; que ceux pour lesquels cette facilité n'est pas acquise de façon stable mais qui réussissent de façon régulière à y accéder profitent largement du cours. Ceux qui essayent de se limiter à une compréhension procédurale et au domaine de l'arithmétique et de l'algèbre ne parviennent pas à réussir le cours de calcul. Toutefois, parmi les élèves en difficulté, certains mettent toutes les chances de leur côté et finissent par réussir. Pour quelques uns, le cours est inaccessible et il ne leur est même pas donné de s'en apercevoir. Pour d'autres, bien qu'étant faibles, il en va tout autrement. Leur motivation intrinsèque, quand elle est suffisamment importante, résiste de belle façon aux difficultés et aux échecs. Ces derniers justifient les efforts et le temps consacrés par les enseignants aux élèves en difficulté. Le plus souvent nous n'avons pas l'occasion de suivre ces élèves jusqu'à ce qu'ils réussissent et nous restons sur l'opinion qu'ils n'étaient pas à leur place et que nos efforts étaient inutiles. Ce qui n'est pas toujours le cas.

Nous retenons la nécessité de travailler au palier abstrait comme caractéristique du niveau de compréhension invoqué par les élèves du collégial avec la responsabilité de faire régulièrement des incursions au palier formel.

Malgré le contexte actuel de remise en question de toute la structure de l'ordre collégial, il faut rendre explicite le contrat didactique assumé par les enseignants de mathématiques, à la fois vis-à-vis des élèves et vis-à-vis des collègues, et lancer la discussion pour l'ensemble de la formation mathématique. Nous espérons que ces efforts débouchent sur une harmonisation des exigences pour les différents cours et sur une production de matériels didactiques cohérents.

1.4 L'éventuelle utilisation de la séquence par d'autres enseignants

Un des buts de cette étude était de fournir une description documentée de notre approche. En effet, il nous semble important que l'enseignant qui utilise un matériel qu'il n'a pas conçu lui-même puisse situer son travail dans une vision à long terme. C'est la condition nécessaire à l'utilisation des questions qu'on ouvre et qu'on ne ferme pas immédiatement, que ce soit pour les fermer dans le même cours ou dans un autre cours. Le cas des questions qui ne peuvent pas être fermées dans le même cours nous incite à suggérer une communication entre les enseignants qui se suivent auprès de l'élève. Il faut avouer qu'au collégial la communication entre les enseignants commence par une concertation entre les enseignants qui donnent un même cours à différents groupes d'élèves; en général elle ne va pas plus loin. Nous pensons qu'un document de ce type peut servir de base de discussion.

Ceci nous amène à des remarques plus générales sur la conception de séquences didactiques et de la maigre documentation qui les accompagne. Les rares fascicules destinés aux enseignants ne contiennent que les réponses numériques de tout ou partie des exercices. Or, aujourd'hui on peut générer ces réponses avec un logiciel approprié et si l'on juge important qu'un enseignant ait à tout prix la bonne réponse, on devrait lui suggérer de faire lui-même les exercices de manière à rafraîchir ses habiletés procédurales. On ne trouve pas dans ces fascicules de justifications historiques, épistémologiques ou phénoménologiques de l'approche. On y trouve encore moins d'explicitation de la gestion de la situation didactique, d'exemples de comportements ou de productions d'élèves qui butent sur une difficulté ni de propositions de réactions susceptibles de débloquer la situation. Or la gestion de la situation didactique est largement dépendante du système de valeurs de l'enseignant et de la façon dont il conçoît sa relation au savoir, au groupe-classe et à l'élève comme personne. On n'explicite pas ce genre de chose et pourtant il nous semble que de verbaliser des éléments de cette conception peut avoir une grande importance dans la relation didactique et l'apprentissage qui s'ensuit. Par exemple, prenons le discours suivant qui décrit en partie le contrat didactique que nous proposons à nos élèves.

«Je tiens à ce que vous construisiez vos propres connaissances. J'ai l'intime conviction que vous en êtes capables et que je peux vous aider à le faire, mais je ne ferai pas le travail pour vous. Vous pouvez compter sur moi pour vous poser les bonnes questions et pour vous suivre dans vos raisonnements, mais pas pour vous arrêter quand vous êtes partis sur une mauvaise piste. Je ne vous laisserai pas vous noyer, mais je ne nagerai pas pour vous.»

Il y a deux volets à une telle attitude; pour l'enseignant, l'un consiste à faire suffisamment confiance aux capacités de l'élève et l'autre concerne la dévolution à l'élève des problèmes posés. Or il ne peut être question pour un enseignant qui n'est pas convaincu des deux volets de réussir à faire passer ce discours. Le premier volet nous semble le plus problématique, le second en est une conséquence logique. Nous pensons que cette question d'attitude est une des limites possibles de l'utilisation de notre approche et qu'il n'est pas de notre rôle ni de nos capacités de proposer des changements d'attitudes. Nous nous bornerons donc à dire qu'il est possible pour un enseignant de mettre ces attitudes en application. Par ailleurs, c'est une condition sine qua non pour que les élèves assument la part qui leur revient de ce contrat: avoir confiance en leurs propres capacités et plus encore **accepter les problèmes qu'on leur présente comme étant «à résoudre» et à résoudre par eux**. Nous voulons comme preuve de l'importance de cette partie du contrat l'échec en calcul de ceux qui se sentaient peu concernés par ce qui se passait en classe et la réussite d'autres qui, au contraire, à la longue et presque sans aide, finissent par maîtriser les concepts mis en jeu.

2. Les suites et retombées de l'étude

2.1 Un regard critique sur les productions des enseignants

Le vocable d'enseignant-chercheur peut parfois être ambigu. Pour nous il est clair que nous sommes des enseignantes qui faisons occasionnellement de la recherche et que nous ne pouvons pas effacer les traces de plus de quarante années cumulées d'enseignement. En particulier nous avons acquis la conviction qu'une bonne façon de produire des séquences d'enseignement est de laisser l'enseignant formuler son expérience sous forme de proposition dans des documents écrits. Les considérations théoriques seront utiles, par la suite seulement, pour décrire les événements didactiques et mettre en lumière les enjeux de la séquence d'enseignement.

Or, un autre but de cette étude était de fournir un exemple d'analyse didactique d'une séquence d'enseignement qui aurait pu être repris à l'occasion de l'analyse de toute autre séquence. Nous pensions en particulier aux différentes séquences qui ont été produites récemment pour le cours de méthodes quantitatives en sciences humaines. Nous pensons encore que l'étape qui doit suivre la conception d'une séquence doit être une réflexion sur le contenu notionnel et sa pertinence, sur le degré d'abstraction appelé et celui réalisé et enfin sur la formation acquise et son idonéité dans la formation globale de l'élève. Nous adhérons en particulier à toutes les mises en garde contre les glissements, les créations et les substitutions d'objets d'enseignement. Il est vrai que l'enseignement suscite la création de représentations et d'outils et la montée de questions qui sont de vrais problèmes, mais ce sont d'autres objets et d'autres problèmes. On peut vouloir les enseigner, mais on ne doit pas le faire en se réclamant de l'objet premier. Nommons un chat un chat, une courbe analytique une courbe analytique, mais ne disons pas que nous enseignons les fonctions alors que nous examinons la problématique du changement d'échelle ou de la restriction du domaine de représentation.

2.2 Une porte ouverte vers la modélisation mathématique

Pour notre compte, nous avons ouvert la porte de l'utilisation systématique de la modélisation et nous voudrions maintenant en faire une proposition formelle puis une analyse didactique.

Cette approche nous paraît à la fois conforme au cadre de construction des concepts de variable et de fonction et devoir ouvrir sur le changement de registre de ces concepts, passant du registre d'objet d'apprentissage au registre d'outil d'apprentissage. Il nous semble que c'est un moyen d'aller au-delà de la conceptualisation et de déboucher sur une compréhension que nous nommerons formelle de ces concepts. Encore faudrait-il que ce terme soit mieux défini.

2.3. Les questions qui restent en suspend

La première question qui reste en suspend concerne la définition d'une meilleure grille d'analyse de la compréhension qu'un élève invoque lors d'un exercice. Nous avons souligné que la grille de Bergeron et Herscovics ne permet pas de tenir compte des changements de domaines conceptuels. Celle que nous avons obtenue en ajoutant la trame conceptuelle ne nous permet pas non plus de décrire de façon satisfaisante une compréhension qui irait au-delà de la conceptualisation. Il reste donc à construire un meilleur modèle de compréhension.

Nous pourrions alors analyser de façon plus pertinente les activités des laboratoires 10 et 11 de notre séquence ainsi que l'utilisation du traceur de graphe dans le neuvième laboratoire. Or ce travail revêt une certaine importance car quelques uns de nos collègues utilisent les procédures construites par les élèves dans ce cours comme outils de visualisation dans le cours de calcul, ce qui pose la question des habiletés nécessaires, même dans le cadre d'un cours où ces outils sont donnés.

Le questionnaire de début de session fait aussi partie des outils incomplets. Nous l'avons utilisé cette année et il ne s'est pas avéré être un bon prédicteur de réussite ni pour le cours de pré-calcul ni pour le cours de calcul. Il y aurait lieu d'y retravailler.

D'autre part, les observations que nous avons faites dans le présent travail, devraient être validées. D'autres enseignants pourraient reproduire les conditions d'enseignement que nous décrivons et observer les événements didactiques de façon à confirmer ou infirmer nos descriptions. Cela s'inscrirait dans un travail de dépersonnalisation qui est essentiel à la production de matériel didactique. Nous avons commencé par la mise au point d'une séquence surpersonnalisée, et de ce fait peu transférable, pour ensuite procéder à une certaine mise en circulation sociale de ces biens didactiques. D'autres enseignants peuvent en faire une repersonnalisation par la consommation productive dans de multiples classes comme le suggère Chevallard (1985b). On pourrait alors distinguer les événements dont l'occurrence dépend de l'enseignant qui en gère le déroulement quotidien de ceux qui adviennent indépendamment de celui-ci.

Nous souhaiterions également qu'une validation de notre description soit donnée par les autres acteurs de la relation didactique, les élèves eux-mêmes. Ils pourraient alors reconnaître ou au contraire nier la conformité de nos descriptions avec ce qu'ils ont vécu en classe. Une telle validation par les acteurs eux-mêmes nous semblerait essentielle. Pour pouvoir procéder à cette validation, il faudrait trouver des élèves volontaires pour procéder à l'apprentissage et à une réflexion sur celui-ci. Peut être que de futurs maîtres seraient de bons sujets puisque pour eux, en matière d'apprentissage, au-delà de l'importance de ce qu'ils font, il y a celle de savoir ce qu'ils font.

Bibliographie

Artigue, M., 1990, Épistémologie et didactique, Recherche en Didactique des mathématiques, vol 10, n°2-3, 241-286

Bachelard, G., 1972, La formation de l'esprit scientifique, Vrin. 256 p.

Bergeron, J., Herscovics N.,1982, Level's in the understanding of the function concept, Workshop on Functions, organized by the Foundation for Curriculum Development, Enschede, Holland, 12 p.

Bergeron J., Bergeron A., Herscovics N., 1987, Kindergartners' knowledge of numbers: a longitudinal case study Part 1: Intuitive and procedural understanding Part2: Abstraction and formalization, Actes du onzième congrès international "Psychology of Mathematics Education", vol 11, 344-360

Booth, L., 1984, Algebra: children's strategies and errors, A report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project, NFER-NELSON, 142 p.

Booth, L., 1989, Grade 8 Students' Understanding of Structural Properties in Mathematics, Actes de la 13ème Conférence "Psychology of Mathematics Education", vol 1, 141-148

Bouvier, A., 1986, Didactique des mathématiques: le dire et le faire, Paris: Cedic/Nathan, 578 p.

Boyer, C. B., 1968, A History of Mathematics, New York: John Wiley and Sons, 717 p.

Brousseau, G., 1983, Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4 n° 2, 165-198

Brousseau, G., 1986, Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques, Thèse pour obtenir le grade de Docteur d'Etat ès Sciences, 483 p.

Brousseau, G., 1988, Les différents rôles du maître, Bulletin AMQ, 14-25

Brousseau, G., 1989, Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, Petit x, n° 21, 47-68

Chevallard, Y., Conne, F., 1984, Jalons à propos d'algèbre, Universités de Genève et de Neuchâtel, 53 p.

Chevallard, Y., 1985, La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, Recherches en didactique des mathématiques, Edition La pensée sauvage, 126 p.

Chevallard, Y., 1988, L'univers didactique et ses objets: fonctionnement et dysfonctionnements, IREM d'Aix-Marseille, 35 p.

Chevallard, Y., 1989, Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège-deuxième partie: perspectives curriculaires: la notion de modélisation, Petit x, nº 19, 43-72

Colette, J.-P., 1973, Histoire des mathématiques, Ottawa: Éditions du renouveau pédagogique, 228 p.

Dahan-Dalmédico, A. et Peiffer, J., 1982, Histoire des mathématiques-routes et dédales, Paris: Études vivantes, 284 p.

Dallaire et all, (1985, 1987, 1988), Mathématiques soleil (III, IV et V), Ed. Guérin sous la direction de Drolet M.

Dhombres, J., 1987, Mathématique au fil des âges, Paris: Gauthiers-Villars, 327 p.

Dugac, P., 1981, Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions représentables analytiquement, Mathematical Perspectives: Essays on mathematics and historical development, New-York: Academic Press, 13-36

Eves, H., 1983, Great Moments in Mathematics, Before 1650, Mathematical Association of America, 270 p.

Eves, H., 1983, Great Moments in Mathematics, After 1650, Mathematical Association of America, 263 p.

Freudenthal, H., 1982, Variables and Functions, Conference on functions, Report I, 12 p.

Freudenthal, H., 1983, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Dordrecht: D. Reidel, 595 p.

Giard, J. , Haguel, M.-J. , 1985, L'apprentissage du calcul différentiel et intégral par la programmation en Logo, Rapport de recherche. Collège de Sherbrooke, 228 p.

Giordan, A., 1983, L'élève et/ou les connaissances scientifiques, Berne: Peter Lang, 205 p.

Haguel, M.-J., 1986, Using Logo to Introduce the Concept of Limit. in Hoyles, Celia and all, Proceedings of the Second International Conference for Logo and Mathematics Education, London, U.K. : University of London Institute of Education, 180-185

Haguel, M.-J., 1988, La limite d'une fonction en un point, sujet d'étude il y a vingt ans avec une approche axiomatique, à peu près évacuée il y a dix ans du premier cours de calcul, peut-elle aujourd'hui faire une réapparition grâce à l'utilisation de l'ordinateur en mode de programmation?, preparatory papers for Theme group 2 Computers and teaching of mathematics. Working group 2.5 The effects of technology and of computer science on a maths curriculum for the future. Bernard Cornu ed., ICME 6, Budapest, 73-77

Haguel, M.-J., 1989, Activités mathématiques en λ-Logo, Sherbrooke, 250 p.

Harvey, B., 1985, Computer Science Logo Style: Intermediate programming, Cambridge: MIT Press 319 p.

Herscovics, N., 1982, Problems Related to the Understanding of Functions. Workshop on Functions, organized by the Foundation for Curriculum Development, Enschede, Holland, 22 p.

Herscovics, N., 1989, Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra. Research agenda for mathematics education, Vol 4, NCTM . 60-86

Janvier, C., Charbonneau, L., René de Cotret ,S., 1989, Obstacles épistémologiques à la notion de variable: perspectives historiques, Construction des savoirs: obstacles et conflits, Agence d'Arc, 64-75.

Kieran, C.,1989, The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective, Research agenda for mathematics education, vol 4, NCTM, 33-56

Kilpatrick, J., 1987, What Constructivism Might be in Mathematics Education, Actes du onzième congrès international " Psychology of Mathematics Education", vol 1, 4-27

Küchemann, D., 1978, Children's understanding of numerical variables, Mathematics in School, 7 (4), 23-26

Küchemann, D., 1981, Children's understanding of mathematics:11-16, Algebra, K. Hart, London: John Murray, 119 p.

Malik, M.A., 1980, Historical and pedagogical aspects of the definition of function, International journal of mathematics education and science technology, vol.11, no 4, 489-492

Olivier, A., 1988, The Construction of an Algebraic Concept throught Conflict, Twelfth annual conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol 2, 511-518

René de Cotret, S.,1985, Étude historique de la notion de fonction: Analyse épistémologique et expérimentation didactique Mémoire de maîtrise en Mathématiques, Université du Québec à Montréal, 227 p.

René de Cotret, S., 1987, La notion de fonction à travers les représentations graphiques du mouvement, une expérimentation suggérée par l'histoire, Actes du onzième congrès international "Psychology of Mathematics Education", vol III, 155-161

Schoenfeld, A. H., Arcavi, A., 1988, On the Meaning of Variable, Mathematics Teacher, sept. 1988, 420-427

Sfard, A., 1987, Two conceptions of mathematical notions: operational and structural, Psychology of Mathematics Education XI, vol III, 162-169

Sfard, A., 1988, Operational vs structural method of teaching mathematics- case study, Psychology of Mathematics Education XII, vol II, 560-567

Sfard, A., 1989, Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited, Actes de la 13e conférence internationale Psychology of mathematics education, 151-158

Sleeman, D., 1986, Introductory Algebra: a Case Study of Student Misconception, Journal Mathematical Behavior, 5, 25-52

Sutherland, R., 1987, A longtidudinal Study of the Development of Pupils Algebraic Thinking in a Logo Environment, Thèse de doctorat, University of London Institute, 316 p.

Sutherland, R., 1989, Providing a Computer Based Framework for Algebraic Thinking, Educational Studies in Mathematics, Kluwer Academic Publisher, 20, 317-344

Sutherland, R., 1989, Developing algebraic understanding: the potential of a computer based environment, Actes de la 13e conférence internationale Psychology of mathematics education, 205-212

Tall, D.,1989, Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm, Research agenda for mathematics education, vol 4 , NCTM, 87-92

Vergnaud, G., 1989a, Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques, Construction des savoirs: obstacles et conflits, Montréal: Agence d'Arc, 33-40

Vergnaud, G., 1989b, L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre, Construction des savoirs: obstacles et conflits, Montréal: Agence d'Arc, 76-84

Vergnaud, G., 1989c, Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre, Actes du premier colloque franco-allemand en didactique des sciences, 189-199

Vinner, S.,1983, Concept definifion, concept image and the notion of function, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol 14, no 3, 293-305

Von Glasersfeld, E., 1983, Learning as a constructive activity, Actes de la cinquième rencontre annuelle PME-NA, vol 1, 41-69

Von Glasersfeld, E., 1988, Introduction à un constructivisme radical, L'invention de la réalité: contributions du constructivisme, dirigé par Watzlawick, P., Paris: Seuil, 19-43

Weizenbaum, J., 1981, Puissance de l'ordinateur et raison de l'homme: du jugement au calcul, Informatique, 196 p.

Youschkevitch, A. P., 1976,The concept of function up to the middle of the 19th century, Archive for history of exact sciences, vol 16 nº1, 37-85

Annexes

Annexe n°1 : Table des matières du cahier de laboratoire

Table des matières

Notes personnelles.
Résumé.
Glossaire: les principales primitives graphiques et la répétition.

Neuvième laboratoire Graphe des fonctions algébriques en échelle naturelle
Graphe d'une fonction.
Généralisation au graphe de toute fonction.
Notes personnelles.
Résumé.
Glossaire.

Dixième laboratoire Opérations sur les expressions algébriques (calcul symbolique)
Addition, soustraction, multiplication et division.
Composition.
Exercices récapitulatifs.
Notes personnelles.
Résumé.
Glossaire: opérations sur les listes.

Onzième laboratoire Opérations sur les fonctions (calcul fonctionnel)
Enoncé du problème.
Premier sous-problème.
Deuxième sous-problème.
Application aux opérations sur les fonctions.
Notes personnelles.
Résumé.
Glossaire: manipulation des procédures comme objets, procédures d'affichage à l'écran, procédures de fabrication de listes.

Douzième laboratoire Fonctions trigonométriques
Modèle fonctionnel suivi par les coordonnées d'un point se déplaçant sur un cercle.
Examiner les valeurs de cos t et de sin t.
Graphes des fonctions tg t, cotg t, sec t et cosec t.

Treizième laboratoire Le hasard
Énoncé du problème.
Manipulation n°1 pour observer quelques trajets.
Réfléchissons à ce qu'est une expérience aléatoire.
Vocabulaire.
Exercice d'application.
Manipulation n°2 vers la définition de variables aléatoires.
Variable aléatoire.
Manipulation n°3 pour consulter les valeurs d'une variable aléatoire et observer leurs fréquences d'apparition.
Exercice d'application vers l'idée que "aléatoire" ne signifie pas "n'importe comment" et qu'on peut parler de loi régissant les phénomènes aléatoires.
Notes personnelles.
Résumé.

Quatorzième laboratoire Probabilité
Événements indépendants.
Événements dépendants.
Notes personnelles.
Résumé.

Glossaire général
Commandes d'édition.

Annexe n°1 : Table des matières du cahier de laboratoire

Annexe n°2 : Objectifs et articulation dans le temps des activités d'apprentissage

(colonne de gauche, modèle fonctionnel, colonne de droite, λ-Logo)

Première semaine	
Questionnaire "Etat des connaissances"	
Remarque: les deux premières semaines de cours seront consacrées à une révision des notions de secondaire considérées comme indispensables, à l'occasion d'une familiarisation avec le système et le langage Logo. Durant ces deux semaines tout le travail se fait sous forme d'activités de laboratoire, on couvre les trois premiers laboratoires.	Premier laboratoire Procédures et fichiers Contenu: Éditeur et espace de travail. Définition d'une procédure. Composition d'un fichier. Fusion de deux fichiers. Destruction d'un fichier. Objectifs: Identifier les rôles respectifs de l'éditeur et de l'espace de travail. Comprendre l'aspect temporaire ou permanent des espaces de mémorisation.
Deuxième semaine	
	Deuxième laboratoire Calcul numérique Contenu: Les ensembles de nombres N, Z, Q et R. Les opérations. Les priorités des opérations. Objectifs: Reconstruire les ensembles de nombres, les opérations. Distinguer les problèmes syntaxiques des problèmes sémantiques Appliquer les règles d'évaluation des expressions de manière à écrire une instruction qui calcule une expression algébrique, à partir des primitives de calcul.

	<u>Troisième laboratoire Calcul algébrique</u> <u>Contenu</u>: Variable et fonction. Image d'une valeur de x par la fonction f.Domaine d'une fonction. <u>Objectifs</u>: Appliquer les règles d'évaluation des expressions algébriques de manière à définir une procédure qui calcule une expression algébrique, à partir des primitives de calcul. Identifier, dans la représentation d'une fonction par une procédure, la partie qui représente la variable, celle qui représente la fonction et celle qui représente l'image d'une valeur de la variable par la fonction.
<u>Remarques</u>: Les résultats des trois premiers laboratoires sont repris pour faire le lien entre la présentation théorique du chapitre 1 et le quatrième laboratoire. A partir de la troisième semaine 3h en classe et 2h au laboratoire par semaine.	
Troisième semaine	
<u>Chapitre 1: La notion de fonction.</u> <u>Contenu</u>: Variable indépendante et variable dépendante. Notation fonctionnelle. Domaine et image d'une fonction. Opérations sur les fonctions. <u>Objectifs</u>: Être capable de déterminer le domaine d'une fonction. Savoir reconnaître dans un énoncé si on demande de calculer une valeur de la variable indépendante ou de la variable dépendante. Savoir calculer l'image par une fonction d'une valeur de la variable indépendante ou les valeurs de la variable indépendante quand leur image par la fonction est connue. Savoir donner la signification d'un résultat dans le contexte d'un énoncé. Savoir traduire les contraintes d'un énoncé par des restrictions sur le domaine de la fonction.	<u>Quatrième laboratoire Opérations sur les fonctions (calcul algébrique)</u> <u>Contenu</u>: Somme, différence, produit et quotient de deux fonctions. Composée de deux fonctions. Domaine des fonctions résultats. <u>Objectifs</u>: En partant des procédures du troisième laboratoire, concevoir des procédures qui font des opérations sur les images par deux fonctions d'une même valeur de la variable. A partir de ces procédures, identifier le domaine de la fonction résultat, généraliser et énoncer des règles liant le domaine de la fonction résultat à ceux des fonctions composantes. Concevoir une liste de valeurs de la variable qui illustre le domaine trouvé.
Quatrième semaine Synthèse et examen	

Cinquième semaine

Première entrevue

Chapitre 2 Le modèle linéaire et le modèle exponentiel

Contenu:

Définition et propriétés du modèle linéaire. Pente et ordonnée à l'origine.
Équation de la droite à partir de deux points, à partir de la pente et d'un point.
Représentation graphique.
Définition et propriétés du modèle exponentiel.

Objectifs:

Reconnaître si un phénomène présenté par son contexte suit ou non un modèle linéaire.
Reconnaître, dans un énoncé, les données numériques qui correspondent à un point ou à la pente et utiliser ces données numériques pour en déduire la notation fonctionnelle décrivant ce phénomène.
Calculer l'image correspondant à une valeur donnée de la variable indépendante.
Trouver les valeurs de la variable indépendante correspondant à une image donnée.
Reconnaître si un phénomène présenté par son contexte suit un modèle exponentiel.
Représenter graphiquement un modèle exponentiel.

Cinquième laboratoire Suites de valeurs de la variable y

Contenu:

Suites de valeurs de la variable y.
Suites croissante et décroissante.

Objectifs:

Explorer deux modes de variation, variation par addition d'une constante et variation par multiplication par une constante.
Préciser l'influence de la valeur de la constante sur la rapidité et le sens de la variation.
Formaliser les expressions "y est assez grand" et "y est assez petit", adapter ces expressions au mode de variation de y.

Sixième laboratoire Modèle linéaire ou exponentiel?

Contenu:

Comparaison des modes de croissance linéaire et exponentiel.

Objectifs:

Générer des couples (x,f(x)) dans lesquels f(x) varie par rapport à x soit de façon linéaire soit de façon exponentielle.
Identifier dans un contexte les données qui correspondent à la pente d'une fonction linéaire, ou à la base d'une fonction exponentielle, et aux coordonnées d'un point.

Sixième et septième semaine

Exercices en classe pour consolidation

Huitième semaine

Chapitre 3 Le modèle quadratique

Contenu:

Définition et propriétés du modèle quadratique.
Sommet, intersections avec les axes.
Représentation graphique.
Domaine.
Signe d'une quantité du second degré.

Objectifs:

Formuler dans ses propres termes une définition d'un phénomène qui suit un modèle quadratique.
Reconnaître si un phénomène présenté par son contexte suit ou non un modèle quadratique.
Représenter graphiquement un modèle quadratique.
Décrire avec la notation fonctionnelle un phénomène quadratique et en particulier le produit de deux phénomènes linéaires.
Calculer l'image d'une valeur donnée de la variable indépendante.
Trouver les valeurs de la variable indépendante correspondant à une image donnée.
Trouver les valeurs de la variable pour lesquelles une quantité du second degré est positive ou négative.
Interpréter les résultats (sommet, racines, quantité négative ou positive) dans le contexte d'un problème.
Exprimer les grandeurs dont on a besoin en fonction des données pour générer une liste de couples qui permette de répondre à une question précise.
Tracer un graphe cartésien des fonctions étudiées.

Septième laboratoire Modèle polynomial
Suites de valeurs de la fonction f(x)

Contenu:

Exploration du mode de croissance des fonctions polynomiales.
Influence de la variation de x sur les valeurs de la fonction f(x).

Objectifs:

Adapter le mode d'analyse mis au point sur le modèle linéaire à l'étude des autres fonctions polynomiales.
Générer un ensemble de couples (x, f(x)) pour une fonction dont on connait l'expression.
Explorer la possibilité de généraliser le procédé précédent.

Neuvième semaine

Synthèse et examen

Dixième semaine

Deuxième entrevue

Chapitre 4 Applications du modèle exponentiel Contenu: Montant accumulé par un placement à intérêts simples, à intérêts composés. Définition du nombre e. Les fonctions exponentielles de base e. Objectifs: Reconnaître si un phénomène présenté par son contexte suit un modèle exponentiel et établir une expression fonctionnelle de ce phénomène. Résoudre des problèmes portant sur les notions d'intérêts simples ou composés.	Huitième laboratoire Géométrie cartésienne, axes et points. Contenu: La géométrie de tortue, position et orientation de la tortue, déplacements. La géométrie cartésienne, coordonnées d'un point dans le plan. Objectifs: Explorer les possibilités graphiques de Logo. Représenter un système d'axes, placer des points dans un repère.

Onzième semaine

Chapitre 5 Le modèle logarithmique Contenu: Fonction logarithmique. Représentation graphique, domaine, image. Règles de calcul. Objectifs: Appliquer la définition de la fonction logarithmique comme fonction réciproque de la fonction exponentielle pour passer de l'écriture exponentielle à l'écriture logarithmique et vice versa. Résoudre des équations exponentielles.	Neuvième laboratoire Graphe des fonctions algébriques en échelle naturelle Contenu: Particularités graphiques des fonctions algébriques: domaine et image, intersection avec l'axe des x, asymptotes horizontales et verticales. Objectifs: Adapter les listes de couples (x,f(x)) à une interprétation graphique: le graphe cartésien. Explorer les différentes formes de fonctions algébriques et leur domaine. Explorer la notion d'asymptote.

Douzième semaine

Chapitre 6 Les modèles trigonométriques

Contenu:

Les angles, les mesures d'angles.
La fonction sinus de l'angle θ, définition, représentation graphique, ses propriétés.
La fonction cosinus de l'angle θ, définition, représentation graphique, ses propriétés.
Les autres fonctions trigonométriques: tg θ, cotg θ, sec θ, cosec θ.
L'amplitude, la période et le déphasage d'une fonction trigonométrique.
Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques.

Objectifs:

Savoir tracer le graphe des fonctions trigonométriques sin θ, cos θ, tg θ, cotg θ, sec θ, cosec θ.
Savoir tracer une fonction du type $f(t) = A \sin (\omega t+\phi)$.
A partir du graphe être capable de donner, s'il y a lieu, la période, l'amplitude, le domaine et l'image d'une fonction du type $f(t) = A \sin (\omega t+\phi)$.
Résoudre une équation trigonométrique simple.

Treizième semaine

Synthèse et examen

Quatorzième semaine

Chapitre 7 Systèmes d'équations linéaires

Contenu:

Méthode de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires.

Objectifs:

Traduire un énoncé par un choix de variables et un système d'équations linéaires.
Résoudre un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss.
Discuter le nombre et la nature des solutions d'un système d'équations linéaires.
Interpréter une solution dans le contexte du problème.

Dixième laboratoire Opérations sur les expressions algébriques (calcul symbolique)

Contenu:

Calcul symbolique sur des expressions littérales.
Somme, différence, produit, quotient et composée de deux expressions algébriques.

Objectifs:

Manipuler de façon entièrement formelle les opérations sur les expressions algébriques.
Établir le rôle et l'importance des parenthèses dans les manipulations de composition.

Quinzième semaine

Troisième entrevue

<u>Chapitre 8 Programmation linéaire</u>

<u>Contenu</u>:

Résolution d'inéquations linéaires à deux variables.
Résolution de systèmes d'inéquations linéaires à deux variables.
Programmation linéaire, solution graphique de problèmes à deux variables.

<u>Objectifs</u>:

Traduire un énoncé par un choix de variables, une liste de contraintes (système d'inéquations linéaires) et une fonction à optimiser.
Tracer un système de droites à partir d'un système d'équations de la forme $Ax + By = C$.
Résoudre graphiquement un système d'inéquations linéaires.
Représenter graphiquement l'ensemble des points tels que $ax + by + c = M$.
Choisir parmi la famille des droites d'équation $ax + by + c = M$ celle qui correspond à un maximum (ou un minimum) de M, sur un ensemble de points satisfaisant à des contraintes.
Calculer le point d'intersection de deux droites.
Discuter le nombre de solutions.

<u>Onzième laboratoire Opérations sur les fonctions (calcul fonctionnel)</u>

<u>Contenu</u>:

Opérations sur les fonctions.

<u>Objectifs</u>:

Utiliser la définition formelle des opérations sur les fonctions pour représenter chacune de ces opérations comme une procédure. L'effet de chacune sera de créer, à partir des procédures représentant des fonc-tions, de nouvelles procédures repré-sentant leur somme, leur différence, leur produit, leur quotient ou leur composée.

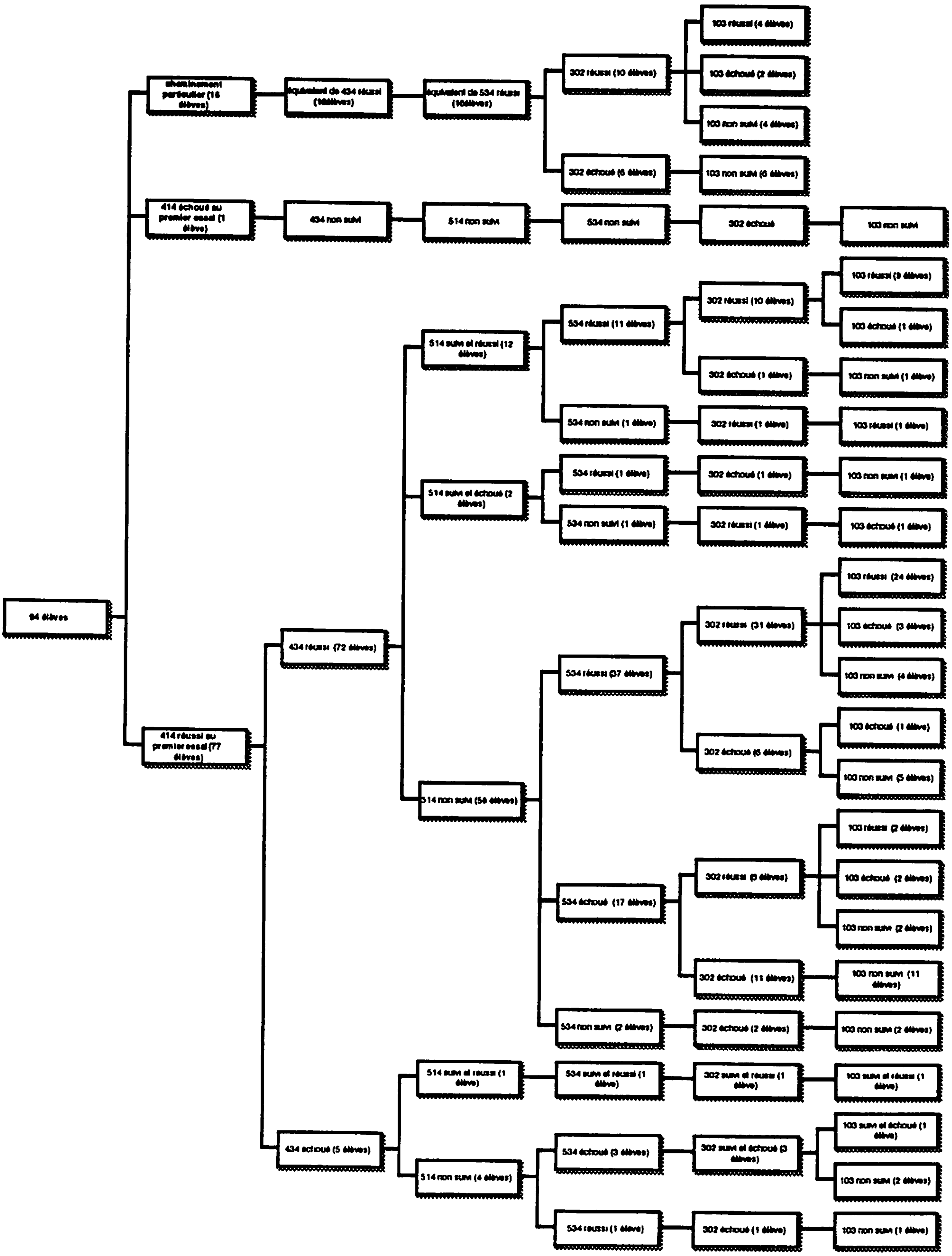
Seizième semaine

Exercices pour consolidation

Dix-septième semaine

Synthèse et examen

Annexe nº3 : Cheminement préalable des élèves



Annexe nº4 : Réponses au questionnaire de début de session

QUESTION Nº1

a) Quelle est la valeur de a+7 pour a = 5?

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	2	2%
Bonne réponse	78	85%
Résout a + 7 = 5	10	11%
Autres	2	2%

b) Si f(x) = x + 7, quelle est la valeur de f(5)?

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	3	3%
Bonne réponse	71	77%
Résout f(x) = 5	15	16%
Autres	3	3%

QUESTION Nº2

x	y
1	8
3	
4	11
7	14
n	

a) Quelle est la valeur de y dans la table pour x = 3?

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	13	14%
Bonne réponse	66	72%
{8,11,14}	5	5%
Autre fonction	4	4%
Pas de réponse (fonction considérée explicite)	2	2%
Autres	2	2%

b) Quelle est la valeur de y dans la table pour x = n?

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	19	21%
Bonne réponse	44	48%
{8, 11, 14 } ou [15,+∞[	12	13%
Formule établie mais pas reconnue	11	12%
Pas de valeur (la fonction est considérée explicite)	3	3%
Autres	3	3%

QUESTION Nº3

Certains suggèrent la formule suivante pour déterminer le poids moyen des garçons de 1 à 7 ans: $p = 8 + 2a$, où p est le poids moyen, en kg, et a l'âge en années. D'après cette formule, de combien un garçon devrait-il engraisser chaque année?

a) 2 kg b) 8 kg c) 10 kg d) je ne sais pas.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	6	6%
Bonne réponse	42	46%
f(0)	7	8%
f(1)	24	26%
Autres	13	14%

QUESTION Nº4

La consommation d'essence d'une automobile est donnée par $c = l/d$, où c est la consommation, l le nombre de litres d'essence consommés et d la distance parcourue.
a) On a consommé 15 litres pour parcourir 120 km, quelle a été la consommation?

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage	
Pas de réponse	11	12%	
Bonne réponse	40	44%	
Bonne réponse sans unité	27	29%	75%
Bonne réponse mauvaise unité	2	2%	
Erreur de calcul	8	9%	
Autres	4	4%	

b) La consommation d'une autre auto est de 0,08 l/km, combien consomme-t-elle d'essence pour parcourir 9 km?

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage	
Pas de réponse	20	22%	
Bonne réponse	45	49%	
Bonne réponse sans unité	10	11%	62%
Bonne réponse mauvaise unité	2	2%	
Incomplet	5	5%	
Autres	10	11%	

QUESTION Nº 5

Monsieur Tremblay loue une voiture aux conditions suivantes:
il devra débourser 20$ de frais fixes (peu importe la durée du contrat). plus 0,15$ du kilomètre parcouru.

a) Si Monsieur Tremblay garde l'auto pendant 3 jours et s'il parcourt en moyenne 75 kilomètres par jour, combien devra-t-il payer?

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Bonne réponse	55	60%
Omet les 3 jours	22	24%
Compte 3 fois les frais fixes	5	5%
Les 2 précédentes	4	4%
Pas de coûts fixes	1	1%
Erreur de calcul	5	5%

b) Combien de kilomètres aurait parcourus un client qui aurait payé 38,45$?

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	1	1%
Bonne réponse	67	73%
Bonne réponse sans unité	3	3%
Erreur de calcul	12	13%
Régle de 3	3	3%
Autres	6	7%

c) Établir une équation qui donnerait le coût total C de la location en fonction du nombre x de kilomètres parcourus.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	9	10%
Bonne réponse	66	72%
Sans frais fixes	6	6%
Incomplet	9	10%
Autres	2	2%

QUESTION Nº6

Quand on fait du calcul numérique, on utilise des conventions et on respecte les priorités des opérations. Voici les quatre opérations de base:

Opération	Notation arithmétique	Code
Addition	+	Somme
Soustraction	-	Différence
Multiplication	x	Produit
Division	/	Quotient

Pour calculer une somme ou un produit, il faut connaître deux nombres, sans préciser dans quel ordre les prendre. Par exemple
Somme 35 5 sera 40
Produit 35 5 sera 175.

Pour calculer une différence ou un quotient, l'ordre de présentation des deux nombres est important. Par exemple
Différence 35 5 sera 30
Quotient 35 5 sera 7.

A. En acceptant ces notations, quel sera le résultat de
a) Somme 15 Différence 10 7

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	4	4%
Bonne réponse	73	79%
Décodage sans calcul	5	5%
Une seule règle bien appliquée	10	11%

b) Produit Somme 4 -2 Somme -3 -4

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	6	6%
Bonne réponse	70	76%
Décodage sans calcul	4	4%
Erreur de calcul	4	4%
Autres	8	9%

c) Somme 15 Quotient 10 Différence 5 5

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	9	10%
Bonne réponse	7	8%
Décodage du 0	12	13%
10/0=0 ou 10/0=10	11	12%
Inversion du quotient	29	32%
Autres	24	26%

B. Comment s'écriraient les expressions arithmétiques suivantes:
a) 15 + (10 - 7)

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	2	2%
Bonne réponse	58	63%
Évalue ou écrit en français	23	25%
Autres	9	10%

b) (4 + (-2)) x ((-3)+(-4))

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	4	4%
Bonne réponse	53	58%
Évalue ou écrit en français	23	25%
Autres	12	13%

C. En utilisant la notation arithmétique habituelle (par ex. 15 + (10 - 7)), comment s'écrirait les expressions suivantes:
a) le quotient de 15 par la différence de 10 et 7.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	8	9%
Bonne réponse	52	57%
Incomplet	12	13%
Arguments inversés	10	11%
Évalue	6	7%
Préfixe	4	4%

b) la somme du produit de 4 par 3 et du quotient de 10 par 2.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	9	10%
Bonne réponse	61	66%
Incomplet	11	12%
Évalue	6	7%
Préfixe	5	5%

QUESTION Nº7

A votre avis, parmi les phrases suivantes, quelle est celle qui décrit le mieux le concept de fonction?

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connait la valeur de la variable x.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) qui peut être infini, dans lequel à chaque valeur de la variable x, correspond une valeur de la variable y.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Choix a : plus procédural	11	12%
Choix b : plus formel	78	85%
Pas de réponse	3	3%

QUESTION N°8

Vrai ou faux?

a) Toute fonction exprime une certaine régularité, les valeurs de x et de y ne peuvent pas être associées de manière fantaisiste.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	3	3%
Vrai	67	73%
Faux	22	24%

b) Toute fonction peut être exprimée par une formule,
par exemple $y = 2x + 1$ ou $y = 3 \sin(p + x)$.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	1	1%
Vrai	85	92%
Faux	6	7%

QUESTION N°9

Les expressions suivantes décrivent-elles une fonction?
a) Si x est un nombre pair, alors $y = 2x + 5$, sinon $y = 1 - 3x$.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	7	8%
Oui	60	65%
Non	25	27%

b) Si $x = 0$, alors $y = 3$,
et si $x > 0$, alors à chaque fois que x augmente de 1, y augmente de 2.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	4	4%
Oui	39	42%
Non	19	21%
Deux réponses	30	33%

c) Pour chaque valeur de x, nous déterminons la valeur de y à notre guise.

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	7	8%
Oui	14	15%
Non	71	77%

QUESTION N°10

Écrire une définition qui vous semble la meilleure possible du mot "variable".

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Idée d'inconnue	46	50%
Idée de variabilité	34	37%
Les deux précédentes	7	8%
Idée de domaine	2	2%
Pas de réponse	3	3%

QUESTION N°11

Parmi les phrases suivantes, choisissez celle qui fait ressortir la caractéristique qui vous semble la plus importante des variables.

a) Une variable est une quantité dont on admet, suite à un calcul ou une expérience, que sa valeur varie ou pourrait varier.

b) Une variable est un symbole qui peut être remplacé par n'importe quel élément d'un ensemble précis de nombres.

c) Les variables ont deux utilités:
- elles permettent d'établir des lois,
- lorsque la solution d'un problème est exprimée à l'aide de variables. elle donne le résultat dans un grand nombre de cas particuliers par simple substitution et sans nouveau calcul.

d) Tout symbole dont la valeur n'est pas déterminée est appelé "variable".

Réponses	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Pas de réponse	2	2%
Choix a : Variabilité	8	9%
Choix b : Représentant le domaine	19	21%
Choix c : Généralité	28	30%
Choix d : Inconnue	35	38%

Annexe n°5 : Évaluation des apprentissages

Premier examen : groupe 4109

Première question (7.5 points)
Étant donné les fonctions :

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{2} \qquad g(x) = \sqrt{5 - 2x} \qquad h(x) = \frac{3x - 2}{1 - x}$$

a) Déterminer le domaine des 3 fonctions f, g et h.
b) Écrire la procédure correspondant à la fonction g(x).
c) Que devriez-vous taper pour faire calculer g(-3) par l'ordinateur?
d) Déterminer le domaine de Q(x) = g(x)/h(x).
g) Illustrer le fonctionnement de C(x) = h(g(x)) à l'aide d'un diagramme de plomberie.
h) Déterminer le domaine de C(x) = h(g(x)).
i) Calculer h(g(-2)).

Deuxième question (5 points)
Des fonctionnaires œuvrant dans le domaine de la santé publique ont déterminé qu'au cours d'un programme visant à immuniser la population contre une forme virulente de la grippe, la somme, en millions de dollars, qu'il a fallu verser pour vacciner x% de la population était d'environ

$$M(x) = \frac{150x}{200 - x}$$

a) Identifier la variable indépendante dans cet énoncé (nom, signification, et unité).
b) Identifier la variable dépendante (nom, signification et unité de mesure).
c) Combien a coûté la vaccination de la première moitié de la population?
d) Quel pourcentage de la population avait reçu le vaccin au moment où la somme déboursée totalisait 4 millions de dollars?
e) Pour quelles valeurs de la variable peut-on calculer M(x)?
f) Pour quelles valeurs de x peut-on formuler une interprétation concrète de M(x)?

Troisième question (2.5 points)
a) Quelle est la commande qui efface toutes les variables et toutes les procédures contenues dans l'espace de travail?
b) Quelle est la commande pour entrer dans l'éditeur?
c) Quelle est la commande pour sortir de l'éditeur?
d) Décrivez l'effet produit par la commande SAUVE "EXAMEN.
e) Décrivez l'effet produit par la commande CATALOGUE.

Premier examen : groupe 4110

Question 1 (2 points)
Les questions qui suivent se rapportent au langage de programmation Logo.
a) Quelle primitive affiche à l'écran la liste des noms de fichiers contenus sur votre disquette?
b) Comment pouvez-vous créer une procédure ?
c) Quelle primitive affiche la ligne titre de toutes les procédures contenues dans l'espace de travail ?
d) Quel effet produit l'instruction suivante: SAUVE "LAB

Question 2 (5 points)
Au moment d'imprimer des cahiers de notes de cours, on détermine le prix de vente d'un cahier en fonction du nombre de copies. Ce prix est fixé de la façon suivante: $P(n) = 2.30 + \frac{5n}{100}$
a) Identifier la variable indépendante dans cet énoncé.
b) Identifier la variable dépendante.
c) Déterminer le prix d'un cahier si on fait 300 copies .

d) Combien de cahiers aura-t-on imprimé si le prix de vente unitaire est de 12 dollars ?
e) Quel est le domaine de P(n) ?

Question 3 (8 points)
Soit les fonctions suivantes:

$f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1 + 2x}{1 - x}$ $\qquad h(x) = \dfrac{1 + 3x}{5}$

a) Déterminer le domaine de f(x)
b) Ecrire une procédure qui permettrait de calculer l'image de g(x) et préciser comment vous utiliseriez cette procédure pour faire calculer g(5).
c) Si P(x) = h(x) $\times$ g(x) déterminer le domaine P(x).

d) Si $Q(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)}$ déterminer le domaine de Q.

e) Utiliser le diagramme de plomberie pour expliquer le fonctionnement de $(g \circ h)(x)$
f) Si $C(x) = (g \circ h)(x)$ déterminer le domaine de C(x).
g) Calculer h(g(2))

Premier examen : groupe 4111

Question 1 (2 points)
Les questions qui suivent se rapportent au langage de programmation Logo.
a) Vous venez d'obtenir le langage Logo, que signifie le point d'interrogation (?) affiché à l'écran ?
b) Enumérer quelques primitives permettant de manipuler les fichiers.
c) Quel effet produit l'instruction suivante :
? EDITE "F1
d) Dans l'expression QUOTIENT PUISSANCE SOMME 3 -8 2 5
quelles sont les entrées de la primitive PUISSANCE ?

Question 2 (5 points)
Des fonctionnaires oeuvrant dans le domaine de la santé publique ont estimé qu'au cours d'un programme visant à immuniser la population contre une forme virulente de la grippe, il faudrait verser environ

$C(x) = \dfrac{150x}{200 - x}$ millions de dollars pour faire vacciner x% de la population.

a) Identifier la variable indépendante dans cet énoncé.
b) Identifier la variable dépendante.
c) Combien coûterait le programme s'il touchait la moitié de la population ?
d) Si on versait 100 millions de dollars, quel pourcentage de la population serait immunisé ?
e) Quel est le domaine de C(x) ?

Question 3 (8 points)
Soit les fonctions suivantes:

$f(x) = x^3 + \dfrac{x}{2}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x + 4}$ $\qquad h(x) = \dfrac{x + 1}{x - 5}$

a) Déterminer le domaine de g(x)
b) Ecrire une procédure qui permettrait de calculer l'image de h(x) et préciser comment vous utiliseriez cette procédure pour faire calculer h(1).
c) Si P(x) = h(x) * g(x) déterminer le domaine P(x).

d) Si $Q(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}$ déterminer le domaine de Q.

e) Utiliser le diagramme de plomberie pour expliquer le fonctionnement de $(h \circ g)(x)$

f) Si $C(x) = (h \circ g)(x)$ déterminer le domaine de $C(x)$.

g) Calculer $h(g(0))$

Second examen : groupe 4109

Première question (6 points)

Un producteur maraîcher sait que pour la production de laitues il doit ajouter aux frais fixes des coûts de production proportionnels à la quantité produite. Or, il a remarqué qu'il lui coûte 240$ pour produire 700 laitues et 280$ pour en produire 900.

a) Établir la notation fonctionnelle de son coût total de production.

b) Quels sont ses frais fixes?

c) Combien produit-il de laitues pour 500$?

d) Un vendeur de machinerie lourde lui propose l'achat d'une machine qui réduira ses coûts de production à 0,10$ la laitue, mais qui augmentera ses frais fixes à 180$.
Avec ce nouveau procédé, combien lui coûterait la production de 700 laitues?

e) Combien doit-il produire de laitues pour que les deux procédés soient équivalents?

f) Représenter sur un même graphe cartésien les fonctions des coûts correspondant à chacun des deux procédés de production.

g) Faire une recommandation justifiée au producteur.

Deuxième question (6 points)

Le Conseil canadien des ingénieurs professionnels fait savoir qu'il y a actuellement 108 000 ingénieurs pratiquants au Canada et que la demande augmente de 3,8% chaque année.

a) Utiliser une notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.

b) De combien d'ingénieurs aura-t-on besoin en l'an 2000 au Canada?

c) Dessiner l'allure du graphe représentant ce phénomène?

d) Quel est le domaine de cette fonction?

Troisième question (2 points)

Un détaillant vend des appareils-photo. Jusqu'à maintenant il les vendait 80$ l'unité et, à ce prix, les consommateurs en achetaient 40 par mois. Il entend baisser son prix afin de stimuler les ventes et estime que chaque réduction de 5$ entraînera la vente de 10 appareils supplémentaires chaque mois. Exprimer le revenu mensuel que réalise le détaillant grâce à la vente des appareils-photo sous forme d'une fonction (ne pas oublier d'identifier les variables).

Quatrième question (5 points)

Un fabricant produit des radios à un certain coût et les vend avec un certain profit. S'il augmente son prix de vente, le nombres de ventes diminue de sorte qu'au bout du compte, si le prix de vente est x$, son profit mensuel sera:

$P(x) = -400x^2+6800x-12000$ $

a) Quel profit mensuel fait-il s'il vend chaque radio 10$?

b) P(x) est une fonction quadratique. Si possible décomposer en produit de facteurs son expression algébrique.

c) A quel prix son profit mensuel est-il nul?

d) Tracer l'allure du graphe de la fonction P(x).

e) Dans quel intervalle son profit est-il positif?

f) A quel prix doit-il vendre ses radios s'il veut faire un profit maximum?

Cinquième question (3 points)

a) La procédure ACCROITRE est définie comme ceci:

```
POUR ACCROITRE :X :Y :QUANTITÉ :EXTRÉMITÉ
SI :X > :EXTRÉMITÉ [STOP]
ECRIS PHRASE :X :Y
ACCROITRE (:X + 1) (:Y + :QUANTITÉ) :QUANTITÉ :EXTRÉMITÉ
END
```

Décrire les entrées de la procédure ACCROITRE en précisant pour chacune, son nom, sa nature et

sa signification.
b) Quel est l'effet produit par l'instruction ACCROITRE 200 40 -0.10 450?

Sixième question (3 points)
Soit f(x) la fonction définie par l'expression

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

et g(x) la fonction définie par l'expression

$$g(x) = \sqrt{5-2x}$$

a) Quel est le domaine de f?
b) Quel est le domaine de g?
c) Écrire la procédure COMPOSÉE dont l'entrée est une valeur de la variable x et qui retourne la valeur correspondante de la fonction (fog) (x).

Second examen : groupe 4110

Question1 (6 points)
Partie 1
Pour augmenter le nombre de jeunes familles s'installant au coeur de la ville de Sherbrooke, le conseil municipal a prévu distribuer des subventions par famille pour la rénovation d'unités d'habitation. On a déjà un certain nombre de mises en chantier prévues pour le printemps 1991, mais une étude de l'impact permet d'affirmer qu'avec une subvention de 1000$, on aurait au total 46 mises en chantier tandis que pour une subvention de 3000$ le nombre de mises en chantier grimperait à 78.
En supposant que le nombre de mises en chantier suit un modèle linéaire,
a) établir la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.
b) Avec une subvention de 5000$, quel serait le nombre de mises en chantier?
c) Quelle subvention devrait-on prévoir pour chaque famille si on veut 200 mises en chantier?
Partie 2
Pour la ville de Québec, la municipalité rencontre le même problème et applique cette politique depuis quelques années. A chaque année, on observe un minimum de 38 mises en chantier sans subvention tandis que pour chaque millier de dollars de subvention, on observe 12 mises en chantier supplémentaires.
d) Combien peut-on espérer de mises en chantier pour 10 000$ de subvention par famille?
Partie 3
e) Représenter ces deux fonctions sur le même plan cartésien.
f) Existe-t-il un montant de subventions qui permettrait d'observer le même nombre de mises en chantier pour chaque ville?
Si oui, lequel?
Si non, pourquoi?

Question 2 (6 points)
Une compagnie aérienne affirme que le nombre de billets vendus augmente de 8% par année. Pour 1979, on notait 250 milles passagers.
a) Utiliser la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.
b) A combien de billets avaient été vendus en 1986?
c) Dans ces conditions,combien de billets seront vendus à la fin de 1990?
d) Tracer l'allure du graphe de cette fonction.
e) Quel est le domaine de cette fonction ?

Question 3 (5 points)
Une étude de marché pour un certain bien nous permet d'établir que la demande des consommateurs varie en fonction du prix de vente (en dollars)de la façon suivante:
$D(p) = -p^2 + 26p - 88$
a) Quel sera la demande si le prix de vente est de 17,50$?

b) D(p) est une fonction quadratique; décomposer en facteurs son expression algébrique (si possible).
c) Déterminer pour quel(s) prix la demande des consommateurs est nulle.
d) Dans quel intervalle la fonction demande est-elle positive?
e) Pour quel prix la demande est-elle maximale?
f) Tracer,au verso de la page précédente, l'allure du graphe de la fonction D(p)

Question 4 (2 points)
Un fabricant vend des lampes au prix de 12$ l'unité et, à ce prix, les consommateurs en achètent 1200 par mois. Il veut augmenter son prix et calcule que pour chaque augmentation de 3$, il perdra la vente de 50 lampes par mois. Le coût total de production d'une lampe est de 7$.
Déterminer la notation fonctionnelle pour représenter la profit mensuel du fabricant.
(Ne pas oublier d'identifier la variable et de préciser votre raisonnement)

Question 5 (3 points)

Soit $f(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \sqrt{9 + x^2}$

a) Déterminer le domaine de f(x).
b) Déterminer le domaine de g(x).
c) Soit la procédure
```
POUR COMPOSEE :X
RETOURNE F G :X
END
```
Décrire l'entrée de la procédure en précisant son nom, sa nature et sa signification.
Préciser l'effet produit par cette procédure.
d) Quel sera le résultat de l'instruction
? COMPOSEE 0

Question 6 (3 points)
a) Ecrire la procédure DIM qui imprimera à l'écran la valeur de Y donnée en entrée ainsi que tous les nombres obtenus à partir de cette valeur en enlevant 5 à chaque fois.
b) Quel est l'effet produit par l'instruction
? DIM 25 10 5

Second examen : groupe 4111

Question1 (6 points)
Partie 1
Un organisme de charité fait appel annuellement à la générosité du milieu. Traditionnellement certains dons sont acheminés sans sollicitation; pourtant il faut aussi recourir à une campagne de financement faisant appel au travail de bénévoles.
Dans la région administrative 05 (Estrie), la campagne de financement démarre cette semaine. La compilation des années précédentes indique qu'avec 500 bénévoles, 180 000$ ont été recueillis et que 800 bénévoles en ont recueilli 223 000$.
On suppose que le montant recueilli par chaque bénévole est constant et que les conditions demeurent inchangées jusqu'à la fin de l'année 1990.
a) Etablir la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.
b) Quel montant sera recueilli si 1000 bénévoles font de la sollicitation cette année?
c) Combien de bénévoles devrait-on recruter cette année pour atteindre un objectif fixé à 300 000$?
Partie 2
Pour la même campagne de financement, dans la région administrative 03 (Québec), il y a déjà 80 000$ de dons. La campagne de financement commence aussi cette semaine et les statistiques des années précédentes montrent qu'en moyenne un bénévole recueille 200$.
d) Combien peut-on espérer recueillir en tout d'ici la fin de l'année avec 1000 bénévoles qui sollicitent dans la région 03 ?

<u>Partie 3</u>

e) Représenter ces deux fonctions sur le même plan cartésien.
f) A partir de ces conditions, existe-t-il un nombre de bénévoles qui produit le même rendement peu importe la région administrative?
Si oui, lequel?
Si non, pourquoi?

Question 2 (6 points)
Le total des soldes impayés pour les détenteurs de carte de crédit augmente de 12% par année. On notait au Canada un total de 2,4 milliards de dollars en 1979.
a) Utiliser la notation fonctionnelle pour décrire ce phénomène.
b) A combien s'élevait le total des soldes impayés en 1989?
c) Dans ces conditions, à combien s'élèvera le total des soldes impayés en 1991?
d) Tracer l'allure du graphe de cette fonction.
e) Quel est le domaine de cette fonction ?

Question 3 (5 points)
Une étude de marché pour un certain bien nous permet d'établir que la demande des consommateurs varie en fonction du prix de vente (en dollars)de la façon suivante:

$D(p) = -p^2 + 22p - 40$

a) Quel sera la demande si le prix de vente est de 7,50$?
b) D(p) est une fonction quadratique; décomposer en facteurs son expression algébrique (si possible).
c) Déterminer pour quel(s) prix la demande des consommateurs est nulle.
d) Dans quel intervalle la fonction demande est-elle positive?
e) Pour quel prix la demande est-elle maximale?
f) Tracer,au verso de la page précédente, l'allure du graphe de la fonction D(p)

Question 4 (2 points)
Un fabricant vend des lampes au prix de 8$ l'unité et, à ce prix, les consommateurs en achètent 1500 par mois. Il veut augmenter son prix et calcule que pour chaque augmentation de 2$, il perdra la vente de 80 lampes par mois. Le coût total de production d'une lampe est de 5$.
Déterminer la notation fonctionnelle pour représenter la profit mensuel du fabricant.
(Ne pas oublier d'identifier la variable et de préciser votre raisonnement)

Question 5 (3 points)

Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 7}$

a) Déterminer le domaine de f(x).
b) Déterminer le domaine de g(x).
c) Ecrire la procédure COMPOSEE qui prend la valeur de la variable x en entrée et qui retourne l'image par la fonction $(f \circ g)(x)$

Question 6 (3 points)
Soit la procédure DIM

```
POUR DIM :Y :BORNEINF :SAUT
SI :Y < :BORNEINF [STOP]
ECRIS :Y
DIM :Y - :SAUT :BORNEINF :SAUT
END
```

a) Décrire chaque entré de la procédure DIM en précisant son nom, sa nature et sa signification.
b) Quel est l'effet produit par l'instruction

```
? DIM 25 10 5
```

<u>**Toisième examen : groupe 4109**</u>

Première question (5 points)

Le 1er septembre 90, Bob a gagné 25000$ à la mini-loto. Il a décidé de placer cet argent en attendant son congé sabbatique, début juillet 92.
Il a prêté à sa fille 1800$, à 10 1/2 %, intérêt simple payable tous les trois mois, et capital remboursable à l'échéance, début juillet 92.
Il a déposé la moitié du reste à la banque, à 9 3/4 % , capitalisés tous les mois, pour 21 mois.
Pour ce qui restait alors, il a fait un dépot garanti dans un Trust, à 12%, pour 21 mois, intérêts simples versés trimestriellement.

a. Quel montant recevra-t-il tous les trois mois? Pendant combien de temps?
b. A l'échéance, combien lui aura rapporté, en intérêts, son dépot à la banque?
c. Compte tenu de ses trois placements, combien aura-t-il retiré en intérêts au total à l'échéance?

Deuxième question (5 points)

Durant la campagne électorale, suite à plusieurs sondages, le comité qui travaille pour l'élection d'un certain candidat pense que le nombre de votes pour leur favori suit une "courbe logistique" dont l'équation est

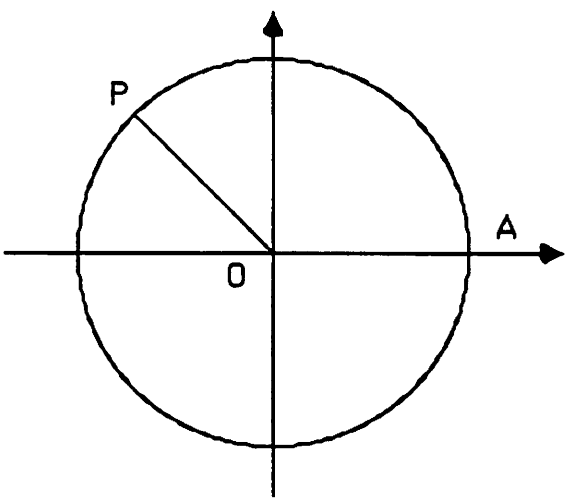
$$V(t) = \frac{20}{1 + 19e^{-1,2t}}$$

où V(t) est le nombre de milliers de votes et t le temps écoulé, en semaines depuis le début de la campagne.

a) Combien de personnes étaient convaincues avant que la campagne ne commence?
b) Combien le candidat avait-il de partisans au bout de 2 semaines de campagne?
c) Au bout de combien de temps a-t-il ramassé 15 000 intentions de vote?
d) Quand obtiendra-t-il 25 000 intentions de vote?

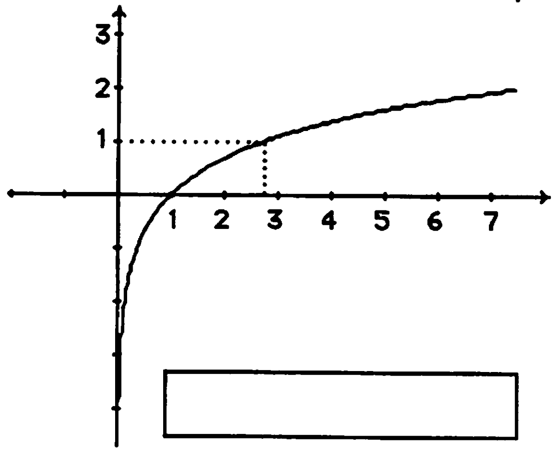
Troisième question (5 points)

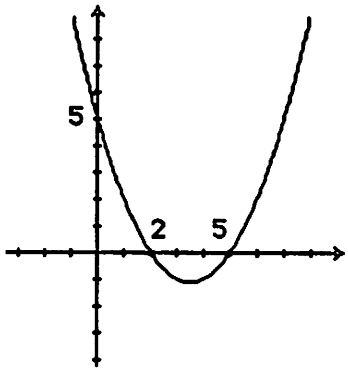
A. Déterminer les valeurs de x ou de y, afin que les points suivants soient sur le cercle trigonométrique:
a) P (x; $-\sqrt{2}/2$) b) P ($-\sqrt{3}/2$; y)
B. Déterminer si les points suivants sont sur le cercle trigonométrique:
a) P (1/2; 1/2) b) P (1/2; $-\sqrt{3}/2$)
c) P(1;1)
C. Sur le cercle trigonométrique suivant indiquer un des angles représentés par P, le sinus et le cosinus de cet angle.
D. Résoudre pour des valeurs de θ comprises dans l'intervalle [0; 2π]. l'équation
$\sqrt{3} \cos \theta + \sin 2\theta = 0$

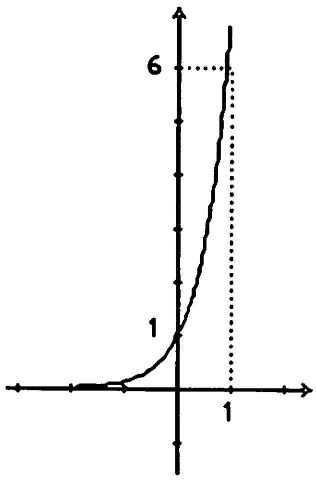


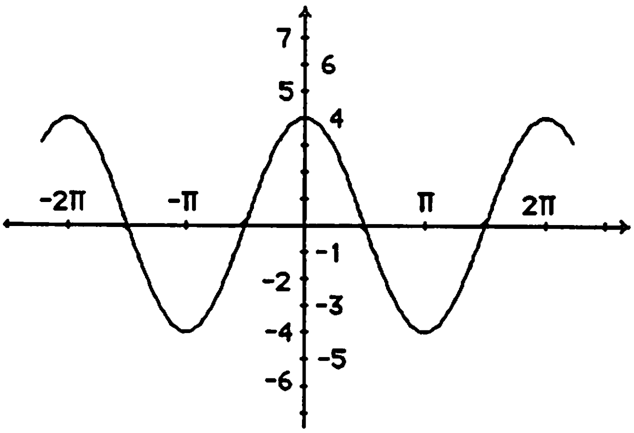
Quatrième question (6 points)

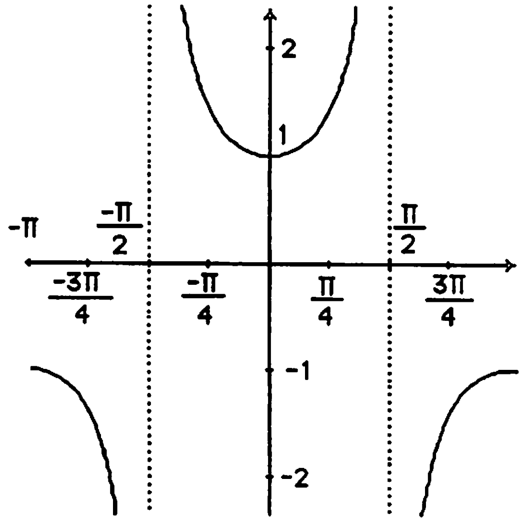
Quelles sont les équations des fonctions représentées ci-dessous?

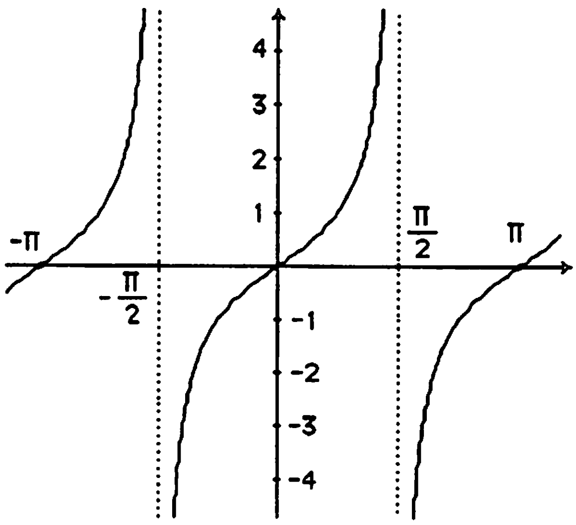






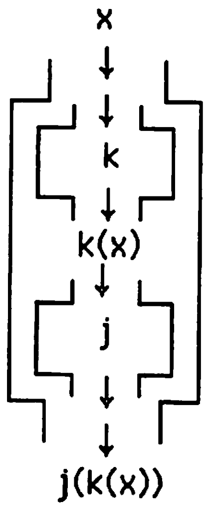






Cinquième question (4 points)

a) Écrire une procédure G qui calcule et retourne 3x-2, x étant donné.
b) Quel est le domaine de la fonction h(x) = ln x?
c) La primitive LN calcule le logarithme naturel d'un nombre et le retourne. Dessiner le diagramme de plomberie correspondant à la fonction f(x) = ln (3x - 2).
d) Quelles sont les deux conditions que doit satisfaire un nombre x pour être dans le domaine de la fonction composée jok?
e) Quel est le domaine de la fonction f(x) = ln (3x - 2)?



Troisième examen : groupe 4110

Question1 (6 points)
Résoudre les équations trigonométriques suivantes:

a) $\sin(-\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ si $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right]$

b) $\mathbf{tg}\,(\theta) = 1$ **si** $\theta \in [\,-2\pi\,,\,0\,]$

c) $\cos(2\theta) = 1$ $\theta \in [\,0\,,\,2\pi\,]$

Question 2 (2 points)
Résoudre les équations exponentielles suivantes:

a) $9\,(3^x)^4 - 81 = 0$

b) $4^{x+2} = 51$

Question 3 (3 points)
Résoudre les équations logarithmiques suivantes:

a) $\log_4(3x-2) = 0$

b) $\log_5(x+1) + \log_5 x = 4$

c) $3\ln(x+1) = 1$

Question 4 (3 points)
Une personne possède 50 000$. Elle décide de diviser cette somme en deux parties inégales. Elle place la première partie à 10% , intérêts capitalisés semestriellement et l'autre à 8% , intérêts capitalisés trimestriellement.
a) Si on note C1, la première partie du capital, quelle expression permettrait de représenter la seconde?
b) Comment calculer le montant accumulé au bout de t années pour chacune des parties?
c) Sachant qu'au bout de 10 ans, le montant total accumulé par ces deux placements est de 118

861,89$, comment cette personne a-t-elle divisé son capital initial ?

Question 5 (3 points)
On a observé que la population d'une ville croît selon la fonction
$P(t) = 15\ 000\ e^{0{,}02t}$ où P(t) représente la population au temps t et
t représente le temps mesuré en années à partir de 1980.
En supposant que la croissance de la population suit la même fonction,
a) quelle sera la population en 2010 ?
b) Quand la population aura-t-elle triplée ?

Question 6 (4 points)
Soit $f(x) = 4 + e^x$ et $g(x) = \log(x - 5)$
a) Tracer l'allure du graphe de f(x).
b) Déterminer le domaine et l'image de f(x).
c) Déterminer le domaine et l'image de g(x).

Question 7 (4 points)
On peut penser que la mathématique est une science arrêtée, stable ou définitive, pourtant il n'en est rien. La production et la publication de résultats nouveaux ne cessent de s'accroître à un rythme de plus en plus grand. En 1960, le nombre de publications s'élevait à 100 000 et ce nombre augmente de 4,3% par année.
a) A ce rythme, à combien s'élève le nombre de publications en 1990 ?
b) En quelle année, pourra-t-on dénombrer 500 000 publications ?

<u>Troisième examen : groupe 4111</u>

Question1 (6 points)
Résoudre les équations trigonométriques suivantes:
a) $\cos(-\theta) = \frac{1}{2}$ **si** $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$
b) $\mathbf{tg}\ (\theta) = 1$ **si** $\theta \in [\ 0,\ 2\pi]$
c) $\cos(2\theta) = \sin(2\theta)$ **si** $\theta \in [\ 0, 2\pi\ ]$

Question 2 (2 points)
Résoudre les équations exponentielles suivantes:
a) $16\,(4^x)^5 - 64 = 0$
b) $5^{2x+1} = 30$

Question 3 (3 points)
Résoudre les équations logarithmiques suivantes:
a) $\log_5(x^2 - 2x) = 0$
b) $\log_4(x - 2) + \log_4 x = 2$
c) $5\ln(x + 2) = 1$

Question 4 (3 points)
Une propriété à revenus est mise en vente par une maison en courtage immobilier.
Trois offres sont faites:
Offre A : **120 000$** payables comptant.
Offre B : **80 000$** payables comptant et 50 000$ dans 2 ans.
Offre C: **50 000$** payables comptant, 30 000$ dans 1 an, 30 000$ dans 2 ans et 25 000$ dans 4 ans.
Sachant que le propriétaire placera son argent à 9% capitalisé semestriellement, au cours des 5

prochaines années, quelle est la meilleure offre? Justifier en considérant le rendement des trois offres.

Question 5 (3 points)

Les bactéries d'une culture croissent selon la fonction $N(t) = 2000\,e^{\frac{t}{4}}$ où N(t) représente le nombre de bactéries présente au temps t et t représente le temps mesuré en heures.
En supposant que la croissance du nombre de bactéries suit la même fonction,
a) Combien y aura-t-il de bactéries au bout de 8 heures?
b) Après combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il doublé?

Question 6 (4 points)
Soit $f(x) = 2 + e^{x}$ et $g(x) = \log(x+1)$
a) Tracer l'allure du graphe de f(x).
b) Déterminer le domaine et l'image de f(x).
c) Déterminer le domaine et l'image de g(x).

Question 7 (4 points)
On peut penser que la mathématique est une science arrêtée, stable ou définitive, pourtant il n'en est rien. La production ed la publication de résultats nouveaux ne cessent de s'accroître à un rythme de plus en plus grand. En 1960, le nombre de publications s'élevait à 90 000 et ce nombre augmente de 4,3% par année.
a) A ce rythme, à combien s'élève le nombre de publications en 1990 ?
b) En quelle année, pourra-t-on dénombrer 400 000 publications ?

Quatrième examen: groupe 4109

Première question (5 points)
Minimiser la fonction coût C(x,y) = 380x + 450y sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x + y \geq 30 \\ 5x + 10y \geq 160 \\ 10x + 10y \geq 250 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases}$$

Deuxième question (3 points)
Une usine spécialisée dans la fabrication de bulldozers et de tracteurs partage le travail en deux ateliers, soit l'atelier d'assemblage-montage et l'atelier de finition. L'atelier d'assemblage-montage emploie 5 journées de travail par bulldozer et 2 journées de travail par tracteur. L'atelier de finition emploie 3 jours de travail par bulldozer et 3 jours de travail par tracteur. En raison de limitations de machines et de personnel, l'atelier d'assemblage-montage peut fournir l'équivalent de 180 journées de travail par semaine et l'atelier de finition, l'équivalent de 135 jours. Le fabricant réalise un profit de 900$ par bulldozer et de 600$ par tracteur.
On s'intéresse au nombre de chaque type de véhicules que le fabricant doit produire pour maximiser son profit hebdomadaire.
Définir les inconnues, écrire les contraintes du problème et exprimer la quantité à optimiser sous forme d'une fonction linéaire des inconnues. Dans ce problème l'optimisation est-elle une recherche de maximum ou de minimum?
Ne pas représenter graphiquement ni résoudre le système d'inéquations.

Troisième question (2.5 points)
Dans le but de planifier son travail hebdomadaire, une étudiante voudrait partager ses cours, ses études, son travail et ses loisirs entre ses 80 heures de disponibilité. D'abord elle voudrait mettre autant de temps à suivre des cours qu'à effectuer un travail rémunéré. Puis elle voudrait consacrer autant d'heures à ses études qu'à ses loisirs et son travail réunis. Enfin, elle voudrait consacrer trois fois plus de temps à ses études qu'à ses loisirs. Quelles inconnues, quelles équations et quelle matrice augmentée représentent cette situation? **Ne pas résoudre le système d'équations.**

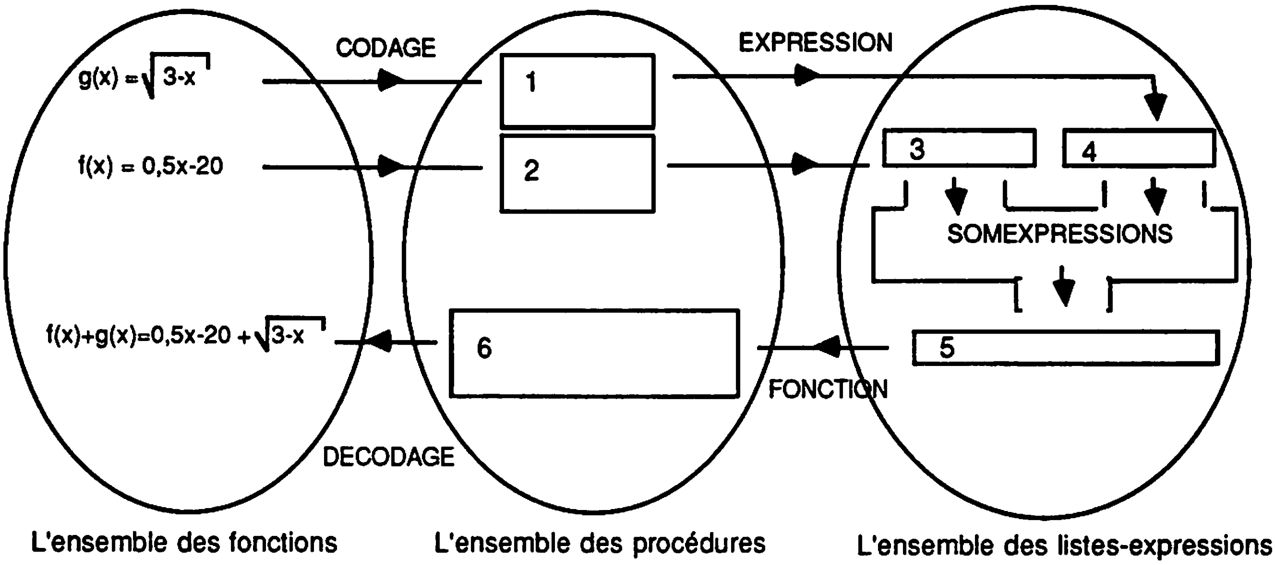
Quatrième question (2.5 points)
Résoudre le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ 4x - 5y + z = -7 \end{cases}$$

Cinquième question (2.5 points)
Résoudre le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

Sixième question (4.5 points)
Sur la figure suivante, 6 rectangles numérotés de 1 à 6, représentent des procédures ou des expressions servant d'entrée ou de sortie aux procédures EXPRESSION, SOMEXPRESSIONS et FONCTION.
Quelle procédure ou quelle expression devrait figurer dans ces rectangles?



Quatrième examen : groupe 4110

Question1 (3 points)
Résoudre le système d'équations linéaires en appliquant la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + z = 6 \\ 3x + y + 10z = 20 \end{cases}$$

Question 2 (3 points)
La société Radio-Canada rencontre des problèmes de gestion importants. Entre autres, on nous précise qu'en moyenne chaque semaine, le nombre de réunions pour un directeur est le triple du nombre total de réunions pour un journaliste et un technicien, même si au cours d'une semaine , le journaliste se réunit 4 fois plus souvent que le technicien. Cette situation peut se résumer en disant que le nombre total de réunions pour ces trois catégories d'employés est 180.
Pour chaque catégorie, déterminer le nombre de réunions tenues au cours d'une semaine.

Question 3 (3 points)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y < 18 \\ 5x + 3y < 30 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement l'ensemble-solution du système d'inéquations linéaires.
b) Déterminer algébriquement les coordonnées des sommets du polygone obtenu en a).
c) Maximiser la quantité $M(x, y) = 4x + y$

Question 4 (3 points)
Une usine possède deux ateliers pour la fabrication de trois types de moteur M1, M2 et M3. L'atelier A peut produire par semaine 120 moteurs de type M1, 80 de type M2 et 40 de type M3. Quant à l'atelier B, il peut produire dans le même délai, 100 moteurs de type M1, 100 de type M2 et 20 de type M3.
a) Représenter à l'aide d'un tableau, la répartition de la production hebdomadaire.
b) Si l'usine vend au moins 5000 moteurs M1 par année, 1000 moteurs M2 et 500 de type M3, donner le système d'inéquations linéaires exprimant la répartition de la production annuelle. (Prendre soin d'identifier les variables utilisées.)
c) Le coût de roulement de l'usine A est de 8000 $ par semaine et celui de l'usine B de 10000$, quelle expression représente le coût de fabrication au total pour 1 an ?

Question 5 (2 points)

Soit la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$

a) Déterminer l'ensemble-solution dans le cas où $a = 1$ et $b = 0$
b) Déterminer l'ensemble-solution si $a = 0$ et $b = 1$
c) Déterminer l'ensemble-solution si $a = 0$ et $b = 0$

Question 6 (4 points)
Partie A:
Vous avez défini deux procédures SOMMEEXPRESSIONS et SOMMEFONCTIONS.
Voici le codage de la procédure SOMMEEXPRESSIONS:

```
POUR  SOMMEEXPRESSIONS  :EXPF  :EXPG
RETOURNE  ( PHRASE [(] :EXPF  [ ) + ( ]  :EXPG  [)] )
END
```

Donner la description des entrées de la procédure SOMMEEXPRESSIONS (nom, nature, signification)
Décrire le résultat de SOMMEEXPRESSIONS.
Voici le codage de la procédure de SOMMEFONCTIONS:

```
POUR SOMMEFONCTIONS   :NOM1   :NOM2
FONCTION  ( MOT :NOM1  "PLUS  :NOM2 ) SOMMEESPRESSIONS   EXPRESSION :NOM1
EXPRESSION   :NOM2
END
```

Donner la description des entrées de la procédure SOMMEFONCTIONS (nom, nature, signification)
Décrire le résultat de SOMMEFONCTIONS
Partie B:
Considérant les procédures suivantes:

```
POUR   F   :X
RETOURNE  RAC ( 10 - :X)
END
```

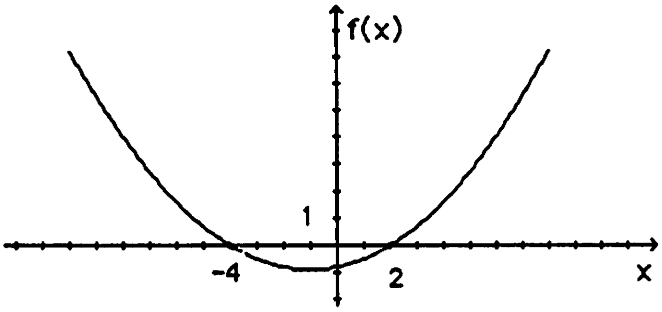
et

```
POUR  G  :X
RETOURNE   QUOTIENT 1 DIFFERENCE  PRODUIT  2  :X   6
```

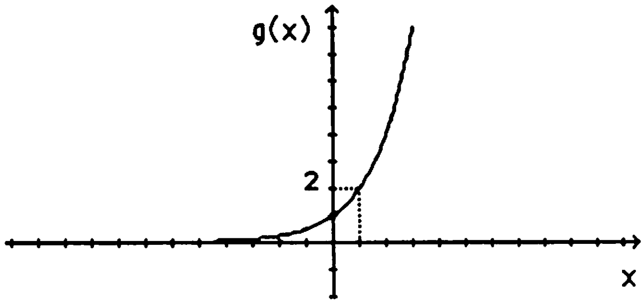
END

a) Si on tape dans l'espace de travail ECRIS F 1 , quel en sera le résultat?
b) Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la procédure F retournera un résultat.
c) Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la procédure G retournera un résultat.
d) Quel est le codage de la procédure COMPOSEFONCTIONS ?

Question 7 (2 points)
Pour chacun des graphes suivants, déterminer l'expression algébrique de la fonction représentée.



b)



<u>**Quatrième examen : groupe 4111**</u>

Question1 (3 points)
Résoudre le système d'équations linéaires en appliquant la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ -x + 2y - 3z = -7 \\ 3x + 2y - 4z = 7 \end{cases}$$

Question 2 (3 points)
La société Radio-Canada rencontre des problèmes de gestion importants. Entre autres, on nous précise qu'en moyenne chaque semaine, le nombre de réunions pour un directeur est le triple du nombre total de réunions pour un journaliste et un technicien, même si au cours d'une semaine , le journaliste se réunit 3 fois plus souvent que le technicien. Cette situation peut se résumer en disant que le nombre total de réunions pour ces trois catégories d'employés est 160.
Pour chaque catégorie, déterminer le nombre de réunions tenues au cours d'une semaine.

Question 3 (3 points)

$$\begin{cases} x + y < 3 \\ -x + y < 2 \\ 2x + 3y > 6 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement l'ensemble-solution du système d'inéquations linéaires.
b) Déterminer algébriquement les coordonnées des sommets du polygone obtenu en a).
c) Maximiser la quantité $M(x, y) = 2x + y$

Question 4 (3 points)
Un fabricant d'automobiles possède trois chaînes, une pour le montage, une deuxième pour la finition extérieure et une pour la finition intérieure. Le modèle de la voiture A se monte en 3 jours, sa finition extérieure prend 2 jours et sa finition intérieure prend 3 jours tandis que le modèle B se monte en 4 jours, avec 3 jours pour la finition extérieure et 3 jours pour la finition intérieure.
a) Représenter à l'aide d'un tableau la répartition du temps de fabrication.
b) Si l'atelier de montage dispose de 250 journées de travail par semaine, celui de finition extérieure de 300 journées et celui de finition intérieure de 280 journées, donner le système d'inéquations linéaires exprimant la répartition du temps pour la semaine en prenant soin d'identifier les variables.
c) Si le fabricant fait un profit de 4000$ sur le modèle A et 5000$ sur le modèle B, quelle expression représente le profit réalisé pour l'ensemble de la production?

Question 5 (2 points)

Soit la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$

a) Déterminer l'ensemble-solution dans le cas où a = 1 et b = 0
b) Déterminer l'ensemble-solution si a = 0 et b = 1
c) Déterminer l'ensemble-solution si a = 0 et b = 0

Question 6 (4 points)
Partie A:
Vous avez défini deux procédures SOMMEEXPRESSIONS et SOMMEFONCTIONS.
Voici le codage de la procédure SOMMEEXPRESSIONS:

```
POUR SOMMEEXPRESSIONS :EXPF :EXPG
RETOURNE ( PHRASE [(] :EXPF [ ) + ( ] :EXPG [)] )
END
```

Donner la description des entrées de la procédure SOMMEEXPRESSIONS
(nom, nature, signification)
Décrire le résultat de SOMMEEXPRESSIONS.
Voici le codage de la procédure de SOMMEFONCTIONS:

```
POUR SOMMEFONCTIONS :NOM1 :NOM2
FONCTION ( MOT :NOM1 "PLUS :NOM2 ) SOMMEEXPRESSIONS EXPRESSION :NOM1
EXPRESSION :NOM2
END
```

Donner la description des entrées de la procédure SOMMEFONCTIONS
(nom, nature, signification)
Décrire le résultat de SOMMEFONCTIONS
Partie B:
Considérant les procédures suivantes:

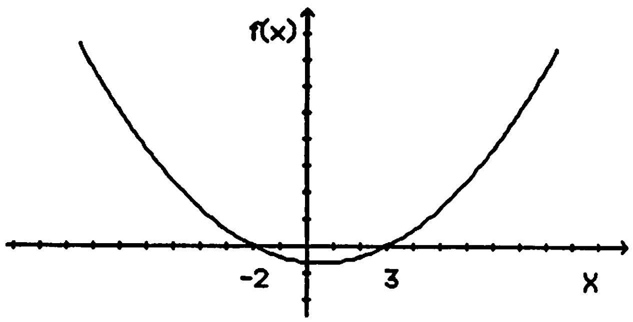
```
POUR F :X
RETOURNE RAC ( 2 - :X)
END
```

et

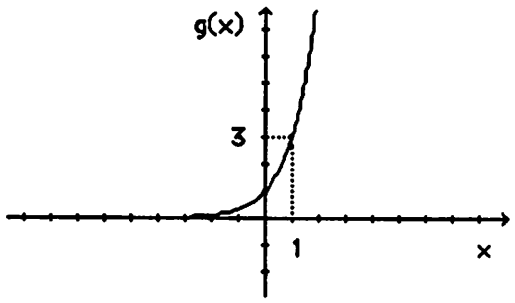
```
POUR G :X
RETOURNE QUOTIENT 1 DIFFERENCE PRODUIT 2 :X 4
END
```

a) Si on tape dans l'espace de travail ECRIS F -7 , quel en sera le résultat?
b) Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la procédure F retournera un résultat.
c) Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la procédure G retournera un résultat.
d) Quel est le codage de la procédure COMPOSEFONCTIONS ?

Question 7 (2 points)
Pour chacun des graphes suivants, déterminer l'expression algébrique de la fonction représentée.



b)



Évaluation Lab9

Version 1: Seule documentation permise: le cahier de laboratoire.

La fonction que vous avez à étudier est définie par :
$f(x) = 0{,}015(x+95)(50-x)$
1. Quelle commande donnez-vous pour obtenir le graphe de cette fonction?
2. Reproduire le graphe obtenu.
3. Quel est le domaine de la fonction?
Quelles entrées de la procédure TRACEGRAPHE dépendent du domaine de la fonction?
4. Quels sont les zéros de la fonction?
Comment les trouver sur le graphe?
Comment les calculer?
5. Quelle est l'image de la fonction?
Comment la trouver sur le graphe?
Quel calcul aiderait à la trouver?
6. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la fonction?
Comment la trouver sur le graphe?
Comment la calculer?
7. Y a-t-il d'autres caractéristiques de la fonction que vous aimeriez mentionner, lesquelles? Expliquez.

Version 2

1. Tracez un système d'axes cartésiens.
2. Ecrivez dans l'éditeur, la procédure F associée à la fonction suivante:
f(x) = (1000x)/(x^2 - 100)
3 Déterminez (algébriquement puis vérifiez la concordance de vos résultats avec l'allure du graphe)
a) le domaine :
b) les zéros :
c) l'ordonnée à l'origine :
4. A partir de l'allure du graphe de f(x) obtenu à l'aide de la procédure TRACEGRAPHE, déterminez l'image de f(x).
5. Avant de quitter le laboratoire, vous devez me montrer votre procédure et le graphe obtenu.

Liste des fonctions utilisées:

Version nº	Équation	Version nº	Équation
1	$f(x) = 0{,}015(x+95)(50-x)$	2	$f(x) = -0{,}05(x-20)(x+65)$
3	$f(x) = \dfrac{x^3+8000}{x^2}$	4	$f(x) = 6\sqrt{x+81}$
5	$f(x) = \dfrac{25x+250}{x-40}$	6	$f(x) = \dfrac{4500x}{x^2+900}$
7	$f(x) = 5\sqrt{36-2x}$	8	$f(x) = 5\sqrt{2x+36}$
9	$f(x) = \dfrac{50x-500}{x+30}$	10	$f(x) = \dfrac{500-10x}{x-20}$
11	$f(x) = \dfrac{15000x}{x^3-8000}$	12	$f(x) = \dfrac{15000x}{x^3+8000}$
13	$f(x) = \dfrac{30(x^2-400)}{200+x^2}$	14	$f(x) = \dfrac{0{,}01x^3+270}{x}$

Annexe nº 6: Entrevues

Première entrevue

Anne

- *Je te propose de répondre à deux questions. Dans un premier temps, j'aimerais que tu m'expliques ce que signifie pour toi le mot "variable".*

- C'est une lettre que tu peux remplacer par plusieurs nombres. Tu introduis la variable dans une fonction. Là tu peux déterminer le domaine.

- *Oui tu vas déterminer le domaine compte tenu de la variable.*

- Oui c'est ça. Si tu as $f(x) = x^2/(4 - x)$, tu ne peux diviser par 0. Tu peux remplacer x par les réels sauf 4.

- *Est-ce que cette lettre représente quelque chose?*

- Je ne comprends pas.

- *Est-ce qu'il y a des contextes rattachés aux variables?*

- Oui il faut trouver le domaine de la fonction.

- *Justement, ma deuxième question porte sur la signification que tu donnes au mot fonction.*

- Bon, pour la fonction je disais $f(x) = x^2/(4 - x)$

- *Tu me donnes l'expression algébrique de la fonction. Utilises-tu d'autres représentations pour une fonction?*

- Il y a celle des deux ensembles réunis par une flèche. Il faut que la flèche parte de nombres différents sinon ce n'est pas une fonction. Il y a les graphiques cartésiens qui servent à représenter une fonction. On peut avoir un graphe en escalier, une droite, une courbe.

- *Au début de la session, on t'a présenté le diagramme de plomberie. Est-ce que cette représentation t'a aidé à comprendre?*

- Je n'ai jamais vraiment compris le diagramme de plomberie. Pour trouver le domaine, j'utilisais la ligne.

- *Tu te servais de la droite des réels pour déterminer les domaines.*

- Oui, ça n'a pas cliqué avec le diagramme de plomberie.

- *Ca va. Merci.*

Carole

- Peux-tu me décrire de façon très détaillée ce que le mot "variable" évoque pour toi?

- Pour moi, une variable c'est souvent quelque chose qu'on appelle x ou y. Ca fait partie d'une ensemble de départ. Ca peut prendre n'importe quelle valeur, dépendant du contexte d'un problème. Dans une équation, tu as souvent deux variables. La variable indépendante est souvent appelée x et l'indépendante, non car x c'est l'indépendante, donc la dépendante est le y ou le C(x), selon le contexte.

- Me donnerais-tu un exemple ?

- Le nombre de litres d'essence que prend une automobile qui se déplace. Comme $I(x) = 20x + 3$. Pour le I(x), ce serait 20$ plus le nombre de litres plus 3. Je ne sais pas. I(x) donnerait le nombre de litres au total.

- Tu as combien de variables dans ce contexte?

- Bien, j'en ai une ... Je dois en avoir deux. x qui est la variable dépendante. hum! indépendante et I(x) qui est la dépendante.

- O.K. Tout à l'heure, tu me disais que la variable peut prendre n'importe quelle valeur. Explique-moi ça.

- Dans l'exemple de l'auto, elle ne peut pas prendre -2 litres parce qu'une auto ne peut pas consommer -2 litres. C'est tout le temps positif. Le contexte indique que la valeur de x doit sûrement être positive. Ensuite, quand tu as ton équation, sous un dénominateur on ne peut pas obtenir 0 car tu ne peux pas diviser par 0. Si c'est sous une racine, il faut qu'elle soit plus grande au égale à 0 parce que tu ne peux pas extraire la racine d'un nombre négatif.

- Est-ce qu'il y a des mots qui pour toi sont reliés au mot variable.

- Équation.

- Parce qu'on retrouve les variables dans les équations mathématiques. Est-ce qu'il y a d'autres mots?

- Pas pour le moment.

- Qu'est-ce que c'est une équation?

- C'est une expression mathématique qui exprime un problème.

- C'est beau. On passe à la deuxième question. Qu'est-ce qu'une fonction?

Une fonction, ça prend toujours un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Pour exprimer une fonction, tu peux te servir du diagramme de plomberie. Dans les fonctions, tu as la valeur de x. L'image, c'est la valeur de ..., admettons de I(x); mais on peut dire aussi du y. C'est tout.

- Explique moi, l'ensemble de départ.

- L'ensemble de départ c'est la valeur que x prend. Tu te souviens de l'équation $2x + 1/3$. A l'ensemble de départ, si on donne à x 0, 3 ou 5. Ce serait l'ensemble de départ. En calculant pour 0, 3 ou 5 dans l'équation $2x + 1/3$, le résultat fait partie de l'ensemble d'arrivée.

- Est-ce q'il y a une différence entre ensemble de départ et domaine?

- Pour moi, c'est la même chose.

- C'est beau. Le diagramme de plomberie, c'est quoi?

- Ca, c'est ce qu'on fait au laboratoire. La fonction 2x + 1/3, tu peux représenter sous forme de diagramme. Tu peux prendre pour l'exprimer une primitive préfixe. Pour le placer dans un diagramme... Je ne peux pas l'inscrire car j'ai un x. Si je donne une valeur à x, multiplication s'écrit PRODUIT. Ce qui m'embête c'est le x. Est-ce que je peux faire le diagramme avec une valeur quelconque à x?

- Oui.

- Ah, je ne peux pas le faire!

- Tu as choisi une valeur?

- Oui, j'ai calculé le quotient, mais il me manque une donnée. Je vais chercher plus loin.

- Ce n'est pas très important.

- D'habitude, ça marche.

- Il y a quelque chose qui cloche, ce n'est pas très grave.
C'est probablement parce que tu as une fonction qui n'est pas très facile. O.K. Ce qui m'intéresse le plus c'est une fonction générale qui se travaille par un diagramme de plomberie.

- Oui mais je dis que ça dépend des fonctions.

- Est-ce qu'il y a d'autres choses reliées au mot fonction?

- Oui, je ne sais pas trop comment ça s'appelle. Je l'ai appris l'an passé. Ici, c'est mon ensemble de départ. Ça c'est mon ensemble d'arrivée. Je fais une flèche pour dire que ça va comme cela.

- C'est un graphe sagittal. Ca fait beaucoup de choses. Merci.

Christiane

- Que signifie pour toi le mot variable?

- Pour moi, variable c'est une valeur qui change. Dans la plupart des problèmes où on utilise une variable, on la remplace par x, puis elle change.

- Il y a un changement dans le mot variable.

- Oui, variable ça dépend.

- As-tu un exemple?

- Quand on parle de la fonction. Ca prend 2 nombres dépendants l'un de l'autre. Je vais prendre un exemple qu'on a vu. Le montant recueilli dans un autobus selon le nombre de personnes. Donc tu as une variable dépendante.

- C'est laquelle la variable dépendante?

- Elle est dépendante du nombre de personnes qui entre dans l'autobus qui celle-là est indépendante de l'autre.

- O.K. La deuxième question. Je te propose le même genre d'exercice, mais cette fois avec le mot fonction.

- Une fonction, c'est une relation qui existe entre deux variables, une dépendante, une indépendante. Le y que je mentionnais tantôt se trouve être ma fonction f(y).

- f(y) égale quoi?

- x + 1 ou n'importe quoi. Il faut mettre en relation deux variables; un arrivé et un départ pour que ça donne une fonction.

- Pour que ça donne une fonction. Tu vois un lien?

- Oui c'est ça.

- Un ensemble d'arrivé puis un ensemble de départ?

- S'il n'y a pas de relation, ça ne peut pas être une fonction.

- D'accord. Veux-tu m'expliquer la notation que tu utilises?

- f(y) = x + 1. Ce sont des variables. Je peux les changer par des chiffres. Je peux mettre n'importe quoi.

- O.K. Précise-moi pour le f(y).

- Je dis fonction, aussi je mets f pour illustrer mieux fonction. Puis y, c'est parce que ... hum! J'aurais pu écrire f(x) en disant que c'est ma fonction de x. Puis je change le x pour 2 et je calcule.

- On peut aussi bien dire f(y) que f(x)?

- Bien dans le fond, je serais mieux d'écrire f(x) ou y. Le y serait ma fonction.

- Peut-on l'appeler la variable dépendante?

- Oui y deviendrait la variable dépendante.

- Bien. Quand tu parles de fonction, y a-t-il des schémas qui te viennent en tête?

- Juste le diagramme de plomberie, qu'on a vu en classe.

- Est-ce que ce diagramme t'a apporté quelque chose de nouveau?

- J'ai trouvé cela super important quand on a vu la fonction d'une fonction.

- La composition de deux fonctions?

- Oui c'est ça. Je trouve cela plus simple avec le diagramme. Tu remplaces la variable par le nombre. Ca devenait évident. Si le diagramme de plomberie n'avait pas été là, j'aurais eu plus de difficultés à comprendre.

- Plus abstrait?

- Oui.

- Je te remercie pour aujourd'hui.

Christophe

- Je te propose deux questions. Dans un premier temps, j'aimerais que tu m'expliques ce que signifie pour toi le mot variable.

- Une variable pour moi, c'est un nombre non défini. C'est une formule où tu remplaces le x par un chiffre. Un nombre, n'importe lequel pour avoir une réponse.

- As-tu un exemple?

- Bien, si tu veux savoir le pourcentage des animaux dans une forêt. Ca dépend des chasseurs. Combien ils tuent d'animaux.

- O.K. As-tu autre chose d'important autour de ce mot là?

- Quel mot?

- Au mot variable.

- Je n'ai pas d'idée.

- O.K, on passe à la deuxième question. Que signifie le mot fonction?

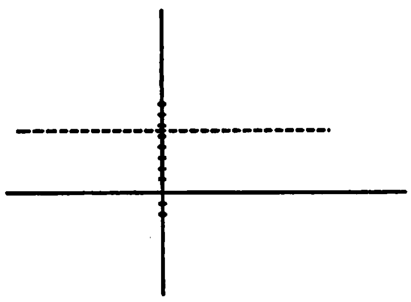
- Est-ce que tu parles des graphiques? La fonction linéaire c'est un graphe.

- Oui, tu peux me parler des graphiques si tu trouves ça pertinent.

- Je dessine?

- Si tu veux. Tu fais un système d'axes.

- C'est ça



- *Je vois des graduations. C'est ça?*

- Il y en a deux.

- *O.K.*

- C'est une fonction représentée par une équation. Je n'ai pas fait l'équation, ça s'appelle une fonction constante.

- *Pourquoi?*

- Parce l'image est tout le temps 2.

- *La formule serait f(x) = 2. Est-ce qu'il y aurait d'autres types de formules que tu pourrais représenter?*

- Tu peux représenter toutes les formules.

- *Est-ce que c'est une forme générale d'une fonction linéaire f(x) = 2?*

- Pardon?

- *Est-ce un cas particulier ou un cas général des fonctions linéaires?*

- Je ne penserais pas.

- *Est-ce qu'il y a d'autres types de fonctions que les fonctions linéaires?*

- Il y en a d'autres mais... je ne me souviens pas. Ca ne me vient pas.

- *Est-ce qu'il y a autre chose associée au mot fonction?*

- Bien une fonction c'est tout le temps des couples. L'axe des x, l'axe des y, le domaine, l'image.

- *Qu'est-ce que c'est le domaine?*

- Bien le domaine c'est tout le temps le premier chiffre. C'est ce que tu mets dans la formule. C'est l'axe des x. L'axe des y, c'est l'image.

- *Y a-t-il autre chose?*

- Non.

- *Merci.*

Francis

- Que signifie pour toi le mot variable?

- C'est une valeur qui change selon le contexte.

- Le mot qui te vient en premier, c'est change?

- Oui, c'est quelque chose qui se modifie.

- As-tu un exemple?

- Un exemple... non.

- D'accord, je te propose la deuxième question. Que signifie pour toi le mot fonction?

- Tout ce que je vois, c'est une formule.

- Veux-tu me donner un exemple?

- Je ne sais pas. Il y aurait des variables incorporées là-dedans. x serait une variable. Tu remplaces x par sa valeur et ça va donner un résultat à ta fonction.

- As-tu un exemple de situations concrètes?

- Non.

- Est-ce que tu te rappelles de situations vues en classe qui t'auraient permis de comprendre un peu plus ce que c'est une fonction?

- Non.

- Je te remercie.

Éliane

- Que signifie pour toi le mot variable?

- Pour moi, variable c'est une équation et puis quand on la calcule, il y a toujours trois conditions à vérifier. Premièrement le contexte, deuxièmement s'il y a une variable au dénominateur et troisièmement, s'il y a une variable sous un radical d'indice pair.

- As-tu des exemples?

- Bien, l'équation $\sqrt{2x+1}$. On veut plus grand ou égal à zéro.

- Qui doit être plus grand ou égal à zéro?

- C'est le radical.

- C'est ta troisième condition. As-tu un autre exemple?

- Disons 10x/(2x +1). Ca va être différent de zéro.

- D'accord. Pour la première condition?

- Si j'ai un contexte. Par exemple, si je veux faire imprimer x feuilles à 0,05$ la feuille. Je ne peux pas avoir des feuilles en moins. Donc c'est de 0 à plus l'infini.

- Donc, tu ne peux pas prendre de valeurs négatives. O.K. Tu définis quelles valeurs tu peux donner. Comment appelles-tu cela?

- Quand je définis?

- Quand tu décides que tu peux donner telle valeur mais pas telle autre.
- Est-ce qu'il y a un mot pour cela? Si tu n'en as pas, c'est correct.

- Bon, ça te prend une équation ou un problème écrit. Tu expliques un problème écrit avec une équation.

- O.K. C'est une autre façon de l'écrire.

- C'est en plein ça.

- Est-ce qu'il y a d'autres mots que tu associes au mot variable ou au mot équation?

- Quand on avait f rond g.

- Oui.

- Ca c'est plus compliqué. On doit expliquer quel ensemble de nombres peut entrer dans l'équation. Tu veux que je te l'explique?

- Oui.

- O.K. Par exemple, si j'ai $g = 2x + 1$ et $f = 10/(4x + 1)$. Premièrement, je dirais qu'il faut le diagramme de plomberie. J'ai le x qui entre dans g. Après, je vais aller le rentrer dans f. Ca va faire f de g de x.

- Est-ce que f et g sont des variables?

- Non, c'est comme un nom. Tu peux donner à g n'importe quelle équation.

- Y a-t-il autre chose à ajouter au mot variable?

- Non, d'après moi, ça englobe tout.

- Que signifie pour toi le mot fonction?

- Bien c'est comme l'exemple $f(x) = 2x +1$. C'est une fonction. Ca revient un peu au mot variable. Tu peux avoir le domaine.

- Veux-tu m'expliquer cela?

- Le domaine est un peu lié. Ah! C'est ce que tu m'as demandé tantôt. Je viens juste de m'en souvenir. Bon le domaine c'est tous les nombres que tu peux donner dans la valeur de x, suivant le contexte et tout le kit. Puis l'image, c'est le résultat. Par exemple, si je prends 2, ça va faire 5. Ce sera l'image.

- C'est beau. Est-ce qu'il y a d'autres mots qui sont bien proches du mot fonction?

- Je parlerais peut être ici d'autre chose, mais je ne sais pas quand on a vu cela. Bien, il y a aussi les ordinateurs. On a travaillé les procédures mais je ne pense pas que ....

- C'est beau. Merci.

Marc

- Que signifie le mot variable?

- Pour moi, une variable c'est une lettre qu'on met dans une équation mathématique pour remplacer un nombre, quelque chose, n'importe quoi. Pour nous aider à calculer différentes réponses le plus rapidement possible.

- As-tu un exemple?

- $x = 2y$, si $x = 41$, $y = 21$, bien 20,5; oui car $2 \times 20{,}5 = 41$. Ca remplace le chiffre. N'importe quoi.

- Quand tu dis n'importe quoi, veux-tu préciser?

- Supposons le nombre de maisons qu'il y a dans la rue; le nombre de personnes qui vivent dans telle ville dépend du nombre de maisons. Je ne sais pas.

- Est-ce qu'il y a d'autres mots qui se rattachent au mot variable?

- Je ne sais pas.

- Ca peut vivre toute seule une variable?

- Une variable, ça va avec une équation. Une variable toute seule, ça ne donne rien. Il faut avoir une question pour pouvoir répondre. Il faut une question qui aille avec la variable dans l'équation.

- Comme ça, une variable ça vient dans l'équation.

- Oui. Tu sais pour moi, variable est un terme mathématique qui nous aide; qu'on nous apprend à l'école pour résoudre des problèmes. C'est pas autre chose.

- O.K. As-tu des dessins, des graphes associés à variable?

- Pour moi, une variable n'est pas un dessin. C'est une lettre.

- D'accord. Que signifie pour toi le mot fonction?

- Une fonction c'est un peu comme une variable car une variable va dans une fonction. C'est pour vous aider à calculer. C'est comme je disais avant. C'est presque la même chose. Pour avoir une fonction, il faut se poser des questions. Il faut se trouver quelque chose le plus rapidement possible, on peut calculer n'importe quel chiffre.

- Veux-tu m'expliquer davantage ce que signifie calculer n'importe quel chiffre?

- Supposons qu'on veut déterminer le nombre de personnes qui entrent dans un avion. On peut faire une fonction du nombre de sièges. Une fois la fonction déterminée, on peut mettre 2 dans la variable puis calculer la fonction. Tu peux mettre 4 ou 6. Ca va calculer n'importe quel chiffre. C'est ça, ce n'est pas autre chose.

- O.K. Tu peux mettre n'importe quel chiffre dans ta variable et ça va calculer une réponse.

- Une fonction c'est une solution à plusieurs réponses. Avec juste une fonction, tu peux trouver plusieurs réponses.

- C'est intéressant, continue là-dessus.

- Je ne sais pas quoi dire d'autre. C'est pour nous aider à ne pas perdre de temps. Ça peut calculer plein de choses.

- Y a-t-il d'autres mots attachés au mot fonction?

- Personnellement, je ne me sers pas du mot fonction ailleurs qu'à l'école. Une fonction pour moi, c'est mon cours de mathématiques. Le professeur me donne le mot de fonction et je l'apprends. Je ne me sers pas de cela dans mes loisirs.

- Oui mais à l'école, y a-t-il d'autres mots rattachés au mot fonction?

- Je n'en ai pas appris. Peut-être, je n'en ai pas eu connaissance.

- D'accord. Je te remercie.

Nadine

- Que signifie pour toi le mot variable?

- Une variable c'est un ensemble. Comment dire cela? C'est x ou y. C'est un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée.

- x et y sont des lettres?

- Oui.

- Ces lettres représent-elles un ensemble?

- C'est une variable, ça varie. Ça peut donner une réponse. Je ne sais pas comment expliquer cela.

- As-tu des synonymes pour variable?

- Des synonymes, non.

- Tu n'en a pas? Tu m'as dit un ensemble de valeurs, des valeurs qui changent.

- Oui pour moi c'est ça.

- O.K. As-tu un exemple de situations concrètes?

- D'une fonction?

- Commençons par variable. Est-ce que tu peux associer ce mot variable à une situation de tous les jours?

- Bien, si je prends, je ne sais pas, une budget par exemple, je gagne tant, il ne faut pas que je dépenses plus de tant.

- La variable serait le salaire dont tu disposes à chaque semaine.

- C'est ça. Le montant d'argent pour l'épicerie, ou le compte d'électricité. Ce serait peut être un exemple.

- Maintenant, veux-tu m'expliquer ce qu'est une fonction?

- Une fonction c'est quand on dit $f(x) = 2x^2 + 2x$. Quelque chose comme cela.

- C'est une formule.

- Oui.

- A quoi sert cette formule?

- Ca sert à calculer quelque chose.

- D'accord. Y a-t-il des schémas associés au mot fonction?

- Oui, tu peux avoir la fonction linéaire, la fonction exponentielle ou je ne sais pas.

- Est-ce qu'il y a autre chose?

- Je pourrais te parler des fonctions que j'ai vu avec toi l'an dernier, mais jusqu'à date, on ne les a pas vu. Il n'y a rien d'autre.

- C'est beau.

Nicole

- Peux-tu me décrire de façon très détaillée ce que le mot "variable" évoque pour toi?

- C'est un symbole ou une lettre. On utilise souvent la lettre x. On peut lui donner une valeur. Ca nous sert à solutionner un problème.

- As-tu un exemple?

- Bien, $f(x) = 2x$. Si je donne une valeur à x, ça va donner une réponse qui est f(x). Si je donne 1, ça va donner 2. Si je donne 2, ça va donner 4. O.K. c'est ça. C'est pour trouver un problème où j'utilise la variable x. Je peux lui donner différentes valeurs.

- Vraiment n'importe quoi?

- Bien, il faut que ça existe.

- Explique-moi ça.

- Bien il faut que ce soit des nombres qui existent. Il faut que ce soit possible. Mais je pourrais aussi donner a. Ca donnerait 2a. Tout dépendamment du contexte. Il faut que ce soit possible. Il faut que ça existe.

- Qu'est-ce qui doit exister?

- Le nombre que je donne. Si je prends mon problème, je ne pourrais pas donner une fraction avec un dénominateur égal à zéro. Tu sais, c'est impossible. Donc, je vais amener quelque chose qui est réel.

- O.K. Est-ce qu'il y a d'autres concepts que tu voudrais accrocher au concept de "variable"?

- Je ne comprends pas la question.

-Est-ce que le mot variable vient tout seul dans ta tête ou est-ce qu'il accompagne d'autres mots qui ont du sens uniquement avec ce mot?

- Bien, quand je pense à variable, j'ai toujours en tête l'image de la lettre x car c'est celle-là que j'emploie. Puis, j'ai toujours le mot valeur car pour résoudre le problème, il faut que je lui trouve une valeur à lui donner.

- O.K. Y a-t-il d'autres mots qui sont accrochés au mot variable?

- ... (silence)

- ou au mot valeur?

- Bien quelque chose de possible.

- Possible dans les réels?

- C'est ça, possible dans les réels ou selon le contexte donné.

- Explique-moi ça.

- Bien, c'est de ça dont je parlais tantôt. Je ne sais pas si tu peux donner un mot. Tu sais une variable peut être un mot.

- Par exemple?

- Je ne sais pas. Je n'ai pas d'idée.

- C'est la valeur ou la variable qui peut être un mot?

- La valeur. Tu as parfois des problèmes qui te donnent a pour remplacer x.

- O.K.

- Ce n'est pas juste un nombre. Ca peut être des lettres.

- Qu'est-ce qui distingue le fait qu'une valeur doit être exprimée en lettre alors qu'une autre est exprimée en chiffres? Qu'est-ce que ça va changer?

- Bien si j'ai un chiffre, ça va pouvoir donner une réponse. Comme tout à l'heure, si je donne 1 à 2x, ça me donne 2 tandis que si j'ai a, ça fait 2a. Ce n'est pas un chiffre concret. Ca a une autre signification. S'ils disent dans le problème que a veut dire telle affaire, bien là tu sais que ce ne sera pas pareil.

- Y a-t-il autre chose autour de variables ou de valeurs?

- Bien, dans un problème, je pourrais avoir plus qu'une variable. Puis à chaque variable, il faudrait que j'associe une valeur à ces variables.

- Est-ce qu'il peut y avoir plusieurs valeurs?

- Non, je ne pense pas.

- O.K.

- On dit toujours qu'une variable sert à trouver une autre réponse.

- Cette fameuse valeur qui dépend de la variable, tu l'appellerais comment?

- Ca va être la variable indépendante car c'est aussi une variable. Parce que c'est toujours la même réponse qu'elle va donner dépendamment de la valeur que je donne à la variable indépendante.

Donc l'autre c'est la variable dépendante.

- Reprends-moi ça, dépendante et indépendante.

- Le f(x) serait la variable dépendante parce que sa réponse est toujours la même dépendamment de ce que je donne à ma variable indépendante au début.

- O.K. Ce qui fait que dans un problème, je peux avoir deux variables?

- Oui, tu peux en avoir deux, trois.

- Trois?

- Tu en mets selon tes besoins.

- O.K. Est-ce qu'il y a autre chose que tu veux ajouter à propos de variable?

- Je ne pense pas. Il n'y a rien qui me vienne à l'idée.

- On passe à la deuxième question. Que signifie pour toi le mot fonction?

- Bien une fonction c'est comme une opération qu'on fait faire avec une variable dépendante puis une variable indépendante. C'est comme une condition. On prend n'importe quel chiffre; admettons qu'il soit multiplié par 2, c'est la condition. Ca donne une réponse. C'est une restriction.

- Encore une fois, est-ce qu'il y a des termes que tu associes au terme fonction?

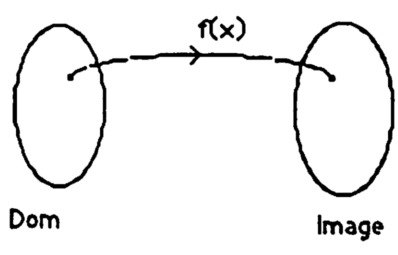
- Bien à fonction, j'associe variable. Puis j'associe toujours condition. J'associe toujours un chiffre à un autre chiffre. Il va y avoir juste une réponse.

- Tu me fais des gestes. Est-ce que tu me dessinerais cela?

- Oui. Je ne sais pas. J'ai un ensemble de départ. Tu prends n'importe quel élément et il va y avoir juste une réponse. On n'aura jamais 2 flèches. C'est ça. je pars avec une valeur que je donne au début puis d'après la condition, il va y avoir juste une réponse qui va être associée à la première valeur que j'ai donnée au début.

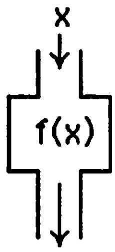
Est-ce que tu as des mots à mettre sur cela?

- A chaque élément du domaine est associé un seul élément de l'image. Autrement dit, l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée.



- As-tu d'autres façons de dessiner des fonctions?

- Bien, cette année, on fait le diagramme de plomberie. Je veux passer ma valeur. Elle subit la condition puis elle va sortir un résultat.



- *O.K. As-tu d'autres façons encore de représenter des fonctions?*

- Bien, il y a les ensembles de compréhension. Je suis un peu rouillée.

Disons {x ∈ ℝ„tel que f(x) = 2x}. Il y avait aussi les ensembles écrits au long. Ils donnent deux ensembles A = {1,2,3,4, ...} B = {2,4,6,8, ...}. Ça c'est plus concret. A c'est l'ensemble du début et B c'est le résultat.

- *A c'est ce que tu appelais tout à l'heure le domaine?*

- Oui.

- *O.K. Y a-t-il autre chose?*

- Bien c'est utile pour faire toutes sortes de problèmes. Tu sais, on se sert souvent des problèmes écrits parce que ça nous fait une formule et à partir de cela, on est sûr qu'on peut trouver nos résultats.

- *Elabore là-dessus S.V.P.*

- Je ne sais pas trop. Tu veux trouver ta production. Tu sais que c'est tant par semaine. Tu t'en sers pour faire une formule. Tu pourrais avec cela calculer plus rapidement, savoir où tu t'en vas.

- *Explique-moi ça, calculer plus rapidement.*

- Bien c'est qu'au lieu de ne pas savoir quoi additionner, tu le sais tout de suite et tu trouves ton résultat.

- *Y a-t-il autre chose?*

- J'ai les graphiques. Avec chaque fonction, je suis toujours capable de faire un graphique. Ca peut donner une ligne, une courbe, n'importe quoi. Ca peut donner différents modèles.

- *Comment fais-tu un graphique?*

- J'ai un axe des abscisses qui est x, puis l'axe des ordonnées qui est y. Avec ma fonction, je trouve un couple. Par exemple (1, 3). Je place (1, 2) puis je recommence pour tous mes couples. Ici, ça me donnerait une droite. Ca peut me donner une courbe, une parabole, un sinusoide ...

- *Si je te donne une représentation graphique, es-tu capable de trouver une fonction?*

- Oui en prenant des points, je peux calculer la pente. Puis je ferais la fonction.

- *O.K. Est-ce que tu veux rajouter quelque chose?*

- Non j'ai pas mal tout dis.

Deuxième entrevue

Anne

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

- Moi. J'ai remarqué les années. Supposons en telle année les avocats faisaient tel salaire puis dix ans plus tard, ils étaient rendus à tel salaire. Donc, jai su qu'il y avait une fonction car à chaque année, ça varie.

- Il y avait une variation?

- Oui. Bien non, c'est un modèle linéaire. Ça augmente à chaque année. Bien en tout cas, j'ai trouvé la pente.

- Est-tu certaine que c'est un modèle linéaire?

- Bien ça pouvait être le modèle exponentiel ou le modèle linéaire. C'est ce que le professeur a dit. Ça l'air que pour moi, ça marchait juste avec le modèle linéaire. C'est cela, ils disaient que présentement les avocats font tel salaire et puis dans 15 ans, ils vont faire tel salaire.

- Ils supposaient qu'il y avait une augmentation constante?

- Oui c'est cela.

- Dans l'article, tu voyais deux quantités, puis il y avait une idée de variation. Qu'est-ce qui est important de déterminer quant tu veux établir le modèle?

- Il faut trouver la fonction.

- Comment fais-tu cela?

- Bien, j'ai trouvé la pente.

- Comment détermines-tu x et f(x)?

- x c'était le nombre d'années écoulées puis f(x) c'est le salaire par rapport aux avocats.

- Donc, il y a un changement pour le nombre d'années et pour les salaires. C'est le nombre d'années qui influence le salaire. Ici, il y a une augmentation?

- Oui, en tout cas, c'est logique. Dans 15 ans, le salaire peut être plus élevé.

- Est-ce qu'ils disaient dans l'article que c'était une augmentation constante?

- Non, il ne le spécifiait pas. C'était juste cela les données. Il y avait juste le salaire maintenant et le salaire dans 15 ans. J'ai calculé la pente et l'ordonnée à l'origine.

- Est-ce que ce pourrait être une croissance exponentielle?

- Bien j'ai essayé et ça a donné les mêmes couples. J'ai demandé à mon professeur car je n'étais pas capable de déterminer d'autres couples.

- Veux-tu m'expliquer la différence qui existe entre une fonction linéaire et la fonction exponentielle?

- Bien une fonction linéaire c'est toujours constant.

- Qu'est-ce qui est constant?

- Bien, supposons une augmentation de cinq ans, ça va augmenter de 100.

- Est-ce l'augmentation qui est constante?

- Oui, l'augmentation est toujours la même par rapport aux années.

- Pour l'exponentielle?

- Je ne sais pas trop comment l'expliquer.

- Si j'enterprète le geste que tu fais, au début la croissance est lente et puis elle devient rapide.

- Oui.

- O.K. On passe à la deuxième question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle qui convient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant , multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequelsy dépend de x et qu'on peut représenter par un graphe cartésien.

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- O.K. Je disais c), mais je ne comprends pas le rapport de deux ensembles.

- Pourquoi c).?

- Parce que à chaque élément de l'ensemble de départ, il existe au plus un élément de l'ensemble d'arrivée. Si on prend un exemple, il faut que tu aies x du départ pour avoir y. On ne peut pas commencer avec x et y ensemble.

- Bon, on va passer à la troisième question. Veux-tu expliquer la différence entre le produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Bien pour le produit de deux fonctions, tu multiplies toutes les données...Pour la composée, tu mets une fonction dans l'autre. Si tu as f(x) et g(x). Tu fais entrer f(x) dans g(x), puis ça va donner la réponse.

- Voudrais-tu m'écrire le produit de deux fonctions puis la composée de deux fonctions?

- $f(x) \times g(x)$ et $f(g(x))$

- Merci.

Carole

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

- Bien quand on parle d'augmentation constante, d'un taux constant. Dans mon article, on parlait de la campagne de centraide. En telle année, il y avant tant de québécois ayant donné tant d'argent puis une autre année, c'était un autre montant d'argent. Avec ces informations, on peut calculer la pente et l'ordonnée à l'origine. Pour finir, on a l'équation.

- Est-ce que ça prend des conditions sur tes données pour que ce soit représenté par une fonction?

- Ca dépend du contexte. Les québécois ne peuvent pas donner -50$. Dans cet exemple, ce serait tout le temps positif. Mais si je prends un point de départ, 1979 et si je veux reculer dans le temps. Ce serait -1 pour une année.

- Est-ce que c'est difficile de trouver une fonction dans un journal?

- C'est quand même assez difficile d'interpréter cela. Des fois, ça ne marche pas avec le modèle exponentiel parce que j'ai fait une erreur. Ca ne pouvait pas me donner des montant de 10^{12}. Il faut vraiment calculer comme il faut pour arriver à la bonne affaire.

- Tu me dis ça prend des couples. Comment reconnais-tu ces couples dans un article?

- Supposons en 1979, le pourcentage était de 8,6% et 1982, il était de 9,3%. Ce serait le couple. Tu pourrais trouver le poucentage pour les autres années.

- Ca veut dire qu'il te faut des années?

- Pas nécessairement. Ça dépend du contexte. Ça dépend de ce qui varie pour la variable indépendante et dépendante.

- Comment reconnais-tu la variable dépendante et l'indépendante?

- Si on dit le taux constant. C'est à partir de cela que je retrouve mes variables.

- On passe à la deuxièmes question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle qui convient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequel y dépend de x et qu'on peut représenter par un graphe cartésien.

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- Ce serait la phase c).

- Pourquoi?

- Parce que je l'ai appris au secondaire. Puis quand tu traces un graphique, si tu as une droite verticale, ce n'est pas une fonction car tu as plus d'une valeur de y pour le même valeur de x.

- On ne tient pas compte de cela dans les autres phrases?

- Oui

- Veux-tu expliquer la différence entre la produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Bien, pour le produit, je multiplie les deux fonctions. Pour la composée, si j'ai f de g(x), je donne la valeur de x dans la fonction g puis je peux aller dans la fonction f pour trouver l'image. Si on prend le diagramme de plomberie, on met la valeur de y dans la fonction f. Ca va donner une image f(x). Cette image, on la met dans la fonction g. On obtiendra la composée des deux fonctions.

- Qui va s'appeler comment?

- f de g de x.

- O.K. Alors le produit n'est pas la même chose?

- Non, d'après moi, pour le produit, tu prends les 2 fonctions et tu les multiplies.

- Est-ce qu'il y aurait moyen de faire un diagramme de plomberie?

- Bien il doit y en avoir un mais comment le faire? Je serais pas mal embêtée.

- O.K.

Christiane

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

- Il faut que tu regardes s'il y a une relation entre 2 choses. Pour avoir une fonction, il faut un lien entre deux éléments. On voit souvent les années. Par exemple, le nombre de naissances par année. Il faut tout le temps une variable qui dépend d'une autre.

- O.K. Le lien de dépendance.

- Oui, puis des quantités.

- Ca se calcule?

- Oui. C'est presque dans tous les articles. Si tu as un loyer à louer à tant par semaine. Selon les années, la moyenne change.

- On passe à la deuxième question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle qui convient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequel y dépend de x et qu'on peut représenter par un graphe cartésien.

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- Je dis b). Car premièrement, ça répond à une définition de fonction. Dans c), on ne dit pas qu'il y a une relation. Quand j'étais plus jeune, on faisait des flèches. Pour a), ça ne définit pas une fonction, ça parle d'additionner, ... Je trouve que c'est b) qui convient car y dépend de x.

- On passe à la troisième question. Veux-tu expliquer la différence entre le produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Bon le produit de deux fonctions. Tu calcules l'image de ta première fonction, l'image de ta deuxième puis tu multiplies les deux réponses. La composée de deux fonctions. Tu calcules l'image d'une première fonction que tu donnes à x dans ta deuxième. Donc, tu calcules ta deuxième fonction à partir de la réponse que tu as déjà trouvée.

- O.K. C'est beau.

Christophe

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

- Le plus facile c'est quand ils donnent les statistiques. Chaque année, tu as en 1986 tant et en 1987 autre chose. Tu peux faire une fonction linéaire. Ils doivent donner les résultats de chaque année.

- Donc ça c'est une fontion facile à repérer. Est-ce que tu peux donner une règle générale pour qu'un phénomène puisse représenter une fonction?

- Un exemple?

- Non justement le contraire d'un exemple. Tu m'as donné un exemple tout à l'heure. En général, qu'est-ce que ça me prend pour être capable de représenter un phénomène par des fonctions?

- Oh! Qu'est-ce qu'ils veulent à partir du début?

- Oui.

- L'origine?

- Oui.

- Peut-être supposons que ça augmente à partir de 1986. Il faut une pente. Il faut une statistique des deux. Tu calcules la pente. Puis tu additionnes ton origine, ta statistique.

- O.K. On passe à la deuxième question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle qui convient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequel y dépend de x et qu'on peut *représenter par un graphe cartésien.*

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- Je choisis b).

- Pourquoi?

- Bien dans a), ils ne disent pas dans le plan cartésien, un graphe.

- C'est un élément important pour une fonction?

- Oui, puis ils disent on peut multiplier, diviser ... Tu peux mettre n'importe quoi, tu n'es pas obligé de le mentionner.

- Pourquoi préfères-tu b) à c)?

- Car on ne parle pas de graphe.

- O.K.

- Dans b) le y dépend de x.

- C'est important pour toi.

- Oui, en mettant la valeur de x, on a le résultat de y.

- Veux-tu expliquer la différence entre la produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Bien le produit c'est une multiplication. Tu as la fonction f_1 fois la fonction f_2. Pour la composée, tu prends la fonction f_2. tu mets $f_1 = f_2$ et tu isoles le x.

- O.K.

- Ça va donner une fonction qui vaut les deux fonctions.

- Qui vaut les deux fonctions?

- Bien qui sont égales. C'est un couple commun.

- Comment trouves-tu la valeur de x qui correspond au point commun?

- Commun aux deux?

- Tu écris l'équation puis tu la résouds.

- Oui.

Francis

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

-Habituellement, tu reconnais par des nombres.

- Tu reconnais des nombres dans l'article ?

- Oui. C'est des données qui sont là. Supposons tant de personnes qui ont eu tel pourcentage à un examen.

- C'est le sujet que tu as pris pour ton devoir? Est-ce que tu te souviens de l'article. J'ai une copie.

- Oui je l'ai.

- Essaie de te rappeler comment tu as fait pour décider de choisir celui-là parmi d'autres.

- Il y avait des nombres.

- Quand il y a des nombres, est-ce qu'on peut dire qu'il y a automatiquement une fonction?

- Non. Il faut un certain nombre qui varie en fonction d'une quantité. Ici, c'est le pourcentage. Le nombre d'années influence le pourcentage. Plus les années augmentent, plus le pourcentage augmente.

- C'est le pourcentage de quoi?

- C'est ...

- De réussite à quoi?

- À un examen de français à l'université.

- Ah!

- Il augmente de 4,58% à chaque année. C'est la moyenne qui augmente.

- Au fur et à mesure que les années s'écoulent, le pourcentage de réussite ...

- Augmente

- Qu'as-tu donné comme hypothèse de travail?

- Rien

- As-tu choisi un modèle linéaire ou exponentiel?

- Je ne sais pas.

- On passe à la deuxième question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle qui convient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequel y dépend de x et qu'on peut représenter par un graphe cartésien.

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- C) est la réponse.

- Pourquoi?

- Premièrement, une fonction ça vit. C'est une relation. Il faut que deux ensembles soient reliés. D'après moi, les variables relient deux fonctions. Une fonction n'est pas réalisable si tu as pour x deux images. Il faut qu'il y ait plus qu'une variable.

- Une valeur?

- Une valeur associée à x.

- On passe à la troisième question. Veux-tu expliquer la différence entre le produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Attends une minute. Le produit, qu'est-ce que tu veux dire? Veux-tu dire comme déterminer la fonction composée? C'est admettons gof. Tu fais f en premier puis g à la place. Tu remplaces l'image de la fonction f dans la fonction g.

- O.K. Puis pour le produit?

- Tu mets la variable x dans la fonction g, ça va donner une image. Est-ce correct?

- Oui.

_ Tu mets x dans la fonction f, ça va donner un autre y. Puis tu vas multiplier ces deux variables ensemble.

- O.K.

Éliane

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

- D'après moi, on regarde s'il y a du temps. Je veux dire les années et s'il y a des chiffres correspondants. Si on compare le phénomène avec d'autres années, il y a une fonction.

- O.K. Un phénomène qui varie en fonction du temps dont on connaîtrait plusieurs valeurs à plusieurs dates.

- Oui disons un minimum de deux.

- As-tu quelque chose à ajouter?

- Non.

- On passe à la deuxième question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle quiconvient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequel y dépend de x et qu'on peut représenter par un graphe cartésien.

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- D'après moi, c'est a).

- Pourquoi?

- On donne une valeur à x, ça donne comme résultat la valeur des y. Pour te dire franchement, la deuxième partie, je ne la saisis pas. Mais à comparer à b) ou à c), celle-là est beaucoup plus générale.

- Donc, b) c'est pas assez général.

- Non. C'est pas juste un couple qui peut être représenté dans un graphique. C'est pas juste ça. C'est une fonction, ça signifie bien des choses. Puis "c'est une relation entre deux ensembles, c'est vrai que c'est une relation entre deux ensembles, mais encore là, ce n'est pas juste cela.

- Veux-tu m'expliquer la différence entre le produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Bien, la composée de deux fonctions c'est tout simplement fog. C'est g qui entre dans f. Puis, le produit, ça donne une fonction du deuxième degré.

- Tu as des exemples là.

- Oui, j'ai g(x) = 5 + 10x et f(x) = 15 + 2x. Si tu les multiplies ensemble, ça va donner une fonction du deuxième degré c'est-à-dire une parabole.

- O.K. C'est le produit.

- Oui. Ca c'est le produit. Pour la composée, je prends g qui est 5 + 10x et je le rentre dans f où le x devient 5 + 10x. Donc le résultat est 25 + 20x, c'est-à-dire une autre fonction du premier degré.

Marc

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

- Pour moi, comment reconnaître dans un article de journal s'il y a des données qu'on pourrait représenter avec une fonction. S'il y a des données, s'il y a un rapport entre deux choses. Moi, j'ai pris la profondeur de l'eau par rapport à la pression. Si la profondeur est tant de mètres, tu as peut-être 0,2 de pression. Je ne sais pas. Ils calculent comme ça. S'ils disent 20 mètres, tu as 0,7. Plus tu descends, plus la pression est forte. Des fois, ils donnent des petits tableaux. Ca peut t'aider. C'est comme ça que tu peux identifier un problème dans un article de journal.

- On va pouvoir le représenter par une fonction.

- Par un graphique. Ça peut être linéaire, comme ça peut être quadratique. Des affaires comme cela. Je ne vois pas autre chose.

- Quand on peut mettre en relation deux grandeurs. C'est ça que tu m'as dit?

- Oui, c'est ça.

- Est-ce que ça prend autre chose?

- Non.

- O.K. On passe à la deuxième question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle quiconvient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant , multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequel y dépend de x et qu'on peut représenter par un graphe cartésien.

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- D'après moi, c'est a).

- Pourquoi?

- Quand tu dis x = my.

Pour trouver y , il faut multiplier par m. Si m vaut 3, tu multiplies par 3. Tu peux additionner aussi. Ce n'est pas juste un ensemble de points comme ils le disent en b) ou en c).

- Veux-tu expliquer la différence entre la produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Bien je pense que pour le produit, on multiplie les deux fonctions ensemble. Ça va en donner juste une . Pour la composée, je ne sais pas. Je vais dire que tu les additionnes ensemble. Ça va t'en donner une seule.

-.O.K. Me donnerais-tu un exemple de produit de deux fonctions?

- Tu as 2x puis l'autre 4x, ça donne $8x^2$. Ça va donner une fonction.

- O.K. Merci.

Nadine

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

- Bien premièrement, il faut des chiffres dans l'article. S'il n'y a pas de chiffres, ça va être un petit peu plus dur de trouver une fonction.

- Ensuite?

- Il faut un point, un point de départ. Supposons en telle année, il y en a 100 000 et dix ans plus tard, il y en aura combien? Il faut qu'ils te posent un problème comme cela.

- Est-ce que c'est seulement dans le cas où on a des années?

- Bien ça dépend, c'est plus facile.

- O.K. L'article que tu as choisi, veux-tu m'en parler?

- Je disais en novembre le baril de pétrole valait 39$ et il y a eu un nouveau record de 41$.

- A quel moment valait-il 41$?

- Je ne sais pas.

- Pourquoi as-tu choisi cet article?

- Car ils disent ici après cinq jours de hausse continue. En matinée, il était de 41,15$, il y a une progression de ,60$. Je me suis dit ça va être bon. Tu vas avoir une progression constante de 0,60$.

- Quel modèle fonctionnel peux-tu appliquer?

- Bien, le 0,60$ est constant. C'est linéaire. J'ai pris ça de même.

- Peux-tu imaginer une autre situation?

- N'importe quoi?

- Oui.

- Supposons que tu gardes à 2,50$ de l'heure, ça va ...

- Ça va déterminer le salaire?

- Oui. Ça c'est le modèle quadratique car tu as deux fonctions linéaires.

- Pourquoi?

- Car on a le tarif horaire multiplié par le nombre d'heures.

- As-tu une variable?

- Oui, le nombre d'heures. Ça va donner ton argent que tu vas avoir dans tes poches.

- Le salaire que tu vas recevoir. Donc le salaire varie en fonction du nombre d'heures.

- Oui.

- Et tu me dis que ce sera un modèle quadratique?

- Oui tu sais, pour le modèle quadratique, il y a deux fonctions linéaires.

- Mais le tarif horaire est-il variable?

- Je dis que le nombre d'heures varie. Le tarif horaire, bien oui ça peut varier. Si la fille te donne juste 1,50$ au lieu de 2,50$ de l'heure.

- O.K. mais est-ce que tu t'entends à l'avance?

- Oui.

- Et une fois l'entente faite, est-ce que ça peut changer?

- Ca peut changer juste deux ou trois ans après.

- Alors, ce ne serait pas une constante ici, une fois que l'entente est faite. Tu penses que ça peut changer. Qu'est-ce qui pourrait influencer?

- Le nombre d'années. Regarde, en 1972, c'est 0,50$ et en 1990 c'est 2,50$. Comprends-tu?

- Oui, le tarif horaire peut varier en fonction des années.
O.k. On peut passer à la deuxième question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle qui convient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequel y dépend de x et qu'on peut représenter par un graphe cartésien.

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- Je choisis b) car je remplace x par un chiffre et j'obtiens y. J'aurai un couple et je pourrais le mettre sur un graphe.

- Parfait. Passons à la troisième question. Veux-tu expliquer la différence entre la produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Bien pour le produit, tu prends deux fonctions et tu fais le produit.

- Explique-moi davantage le produit.

- Supposons que j'ai la fonction $3x^2$ et $1/(x + 2)$, je les multiplie ensemble

- Comment l'écris-tu?

- $(3x^2) \times (1/x + 2)$

-O.K. et si je te demande d'écrire la composée.

- La composée, je ne le sais pas.

- Tu ne te rappelles plus de la composée?

- Non

- Il n'y a rien qui te viens en tête au sujet de la composée?

- Bien, pour la composée de deux fonctions, c'est la même affaire qui est dans les deux fonctions. Je ne sais pas.

- Ça va. Merci

Nicole

- Comment faire pour reconnaître dans un article de journal s'il y a des données que l'on pourrait représenter à l'aide d'une fonction? C'est un exercice que tu as déjà fait en devoir. Est-ce que tu pourrais me raconter comment tu expliquerais à quelqu'un d'autre comment reconnaître dans un article de journal qu'on décrit une fonction?

- Quand on lit l'article, on peut voir qu'il y a des valeurs. Ca prend au minimum 2 valeurs qui peuvent varier. Ici, j'ai le taux de la population active en 1981 puis en 1982. Elle a varié. Donc on voit que le temps a changé et que le taux de la population active a changé. Ça nous fait deux points; en 1981, tant et en 1982, tant....Ça fait comme deux points dans un graphique. Puis je peux trouver l'équation.

- Donc, il te faut deux points.

- Oui, il faut que je trouve deux variables. Il faut que les valeurs soient dans les réels. Il faut que ce soit des nombres qui existent.

- On passe à la deuxième question. Je te donne trois définitions du mot fonction et je te demande de choisir celle qui convient le mieux.

a) Une fonction est un calcul dont le résultat est la valeur de la variable y quand on connaît la valeur de la variable x. On peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser deux fonctions en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les valeurs de y.

b) Une fonction est un ensemble de couples (x, y) dans lequel y dépend de x et qu'on peut représenter par un graphe cartésien.

c) Une fonction est une relation entre deux ensembles. A chaque élément de l'ensemble de départ, est associé au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

- Je réponds c) car on sait qu'en prenant une certaine valeur à x, je vais avoir seulement une réponse pour y. Dans tous les cas, je vais seulement avoir une réponse associée à y.

- Pourquoi rejettes-tu les autres?

- Bien, la première parce qu'ils disent seulement additionner, soustraire, multiplier, diviser, on peut aussi mettre en exposant. On peut faire toutes sortes d'opérations. La deuxième, ils ne disent pas que pour un x, on a juste une valeur de y.

- A ton avis, quelle est la différence entre le produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions?

- Si j'ai f(x) et g(x) avec la valeur 10 pour x. Je vais faire f(10) puis je vais trouver une réponse. Je vais faire g(10) puis je vais trouver l'autre réponse. Puis je vais multiplier les deux réponses ensemble.

- O.K.

- Tandis que si je prends encore f(x) puis g(x) avec x égal à 10. Si je veux f rond g, je vais faire passer x qui est 10 dans g puis la réponse de g(10), je vais la faire passer dans f. Le résultat sera le résultat de la composition.

- O.k. Veux-tu ajouter quelque chose?

- Non, bien, il y a aussi plusieurs façons d'écrire la composée. Je peux écrire fog, ou écrier f(g(x)). Il y a aussi les diagrammes.

Nicole trace les 2 diagrammes de plomberie représentant le produit de deux fonctions et la composée de deux fonctions.

- O.K.

ENTREVUE NO 3

Anne

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. À 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute.J'ai plusieurs questions. On va les regarder ensemble. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données?

- Bien j'ai fait le calcul en a) de f(0). f(0) égale 2. Je me suis trompée, ça c'est une ligne à part. Ça fait f(x) = 2x, x c'est le nombre d'années.

- f(x) c'est quoi?

- f(x) c'est son âge. Attends un petit peu. Non f(x) c'est le nombre d'opérations.

- A la question 1, on te demande d'expliquer le genre de calculs que tu peux faire. À la question 2, tu établis la formule qui te permet de la faire. Bon, tu as compris que le nombre d'opérations dépend de son âge.

- O.K., dans le fond les questions a) et b) reviennent au même.

- Si tu veux. Quel phénomène met en évidence cette formule?

- Ça c'est un modèle linéraire.

- C'est un modèle linéaire?

- À chaque année, ces opérations diminuent de 2%.

- O.K. Ce qui veut dire qu'après un an, il ferait combien d'opérations à la minute?

- Il ferait f(1). Le nombre d'opérations doit être 1000 - 0,02. Ca va me donner la réponse.

- D'accord, quel âge a-t-il à ce moment?

- Après une année, il aura 21 ans.

- Alors à 21 ans, le nombre d'opérations s'élèvera à combien?

- Ca ne marche pas.

- *Veux-tu prendre le temps de relire?*

- Non parce que mes affaires ne marchent pas du tout. Je pensais que c'était linéaire. Est-ce exponentiel?

- *Je ne sais pas. Il faudrait regarder un petit peu.*

- f(0), c'est 1000 ça veut dire A. C'est 1000, c'est correct. f(1) c'est b. Il n'y en a pas...

- *Comment pourrait-on l'établir? Ca diminue de 2% par année. 2% de quoi?*

- de 1000. Je fais 1000 - 2%. Je ne sais pas.

- *2% de 1000.*

- 998 est-ce cela? Je vais prendre ma calculatrice.

- *On peut faire ce calcul sans calculatrice.*

- Je fais x/1000. On va avoir des petits chiffres. Ca ne marche pas cette affaire là. Je vais prendre ma calculatrice.

- *As-tu ta calculatrice?*

- Oui, le calcul mental là! Bon ça fait 20. On a 980.

- *Donc un an plus tard, c'est 980 opérations à la minute.*

- Ca ne marche pas cette affaire là.

- *Pourquoi?*

- Bien f(1) sur f(0); c'est 1000/980.

- *Tu viens d'inverser.*

- C'est 980/1000.

- *Oui.*

- Je prends 980/1000, j'obtiens 49/50. Alors b est 49/50.

- *O.K.*

- Est-ce que c'est censé être cela?

- *C'est correct.*

- C'est un modèle exponentiel.

- *O.K. Est-ce une croissance ou une décroissance?*

- C'est une décroissance.

- *Quelles sont les deux quantités variables par cette formule?*

- Je ne comprends pas. f(x) puis x.

- *Oui, que représentent-ils?*

- x le nombre d'années écoulées.

- *A partir de quand?*

- A partir de 20 ans.

- *Oui*

- Puis, f(x) c'est une opération. Ce serait la réponse.

- *Le couple (10, 817) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert?*

- f(817) = 1000 x $(49/50)^{10}$. Bien si ce calcul donne 817, ce serait le nombre d'opérations.

- *Que veut dire ta notation f(817)?*

- C'est la fonction f.

- *O.K. Je te pose la même question avec le couple (20, 700).*

- Avec 20, ça donne 667. Ca ne marche pas. Ca ne donne pas 700 opérations.

- *Comment sont tous les couples qui décrivent les capacités intellectuelles d'Albert?*

- Bien ce sont des couples de décroissance exponentielle.

- *As-tu une façon de le représenter sur un graphe?*

- Oui tu fais un tableau. Puis tu prends le nombre d'années écoulées. Sur la verticale, tu as le nombre d'opérations. A chaque fois qu'il augmente d'un an, c'est 2%... Je ne comprends pas vraiment.

- *Si tu me donnais l'allure du graphe.*

- Décroissant exponentielle. Je me mélange avec log et exponentiel. Je me mélange. En tout cas, c'est un des deux.

- *Merci.*

- Quelle est la bonne représentation?

- *Celle-ci, car une fonction exponentielle n'a pas d'image négative.*

- Ah!, c'est sûr. je me mélange tout le temps.

- *Merci.*

Carole

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. À 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données?

- Bien on peut trouver après tant années, combien Albert peut effectuer d'opérations. On peut trouver aussi le pourcentage qu'il a perdu par rapport à l'âge actuel de 20 ans, qui se trouve à être le moment où le nombre d'opérations diminue.

- Peux-tu faire un exemple de calcul?

- Supposons qu'à 25 ans, on cherche à déterminer le nombre d'opérations qu'il effectue. On a à 20 ans. On peut établir une équation exponentielle, d'après-moi, la constante serait 1000. b diminue de 2% par année. Je mettrais 0,02 pour l'exprimer en décimal et x serait le nombre d'années écoulées. A 25 ans, il y a 5 années d'écoulées. Donc on a 0.02^5 multiplié par 1000. Ca donnerait 0,00003. C'est ce que je ferais. Il y a peut être mon pourcentage qui est mal exprimé.

- Tu es capable de calculer le nombre d'opérations par minute. Tu me parlais aussi de calculer le pourcentage de diminution.

- On pourrait trouver après t années le pourcentage de diminution. Pour l'effectuer, je suis un petit peu embêtée.

- Est-ce qu'on peut établir une formule à partir de ce contexte?

- Oui, pour calculer 1, je prends la formule de la fonction exponentielle. Comme je disais, il y a peut-être mon pourcentage qui est mal exprimé vu que c'est une diminution.

- Donc, on règle ce problème de pourcentage?

- Oui.

- Peux-tu calculer le nombre d'opérations à 21 ans?

- Je pourrais calculer 2% de 1000 puis le soustraire. Ca fait 20. Ca veut dire 1000 - 20, ça fait 980. A 21 ans, il ferait 980 opérations.

- On va le noter. A 22 ans?

- A 22 ans, ce serait -40%. Ah! Je pense que je viens de voir. La première année c'est 1000. Il y a une diminution de 2%. C'est à la 0. La deuxième année, on a encore une diminution de 2%; à la 1. La troisième année, ce serait 1000 avec 2% à la 2.

- Veux-tu vérifier?

- Ca donne 1000 à 20 ans. 980 à 21 ans.

- Est-ce que tu l'as calculé avec ta formule?

- 20. C'est le nombre d'opérations qu'il fait en moins. A 22 ans, oups! C'est étrange. Ca donne 0,0004 si je le soustrais de 1000, ça ne marche plus car ça donne plus grand que 980. Je suis embêtée. C'est la diminution qui me trahit un petit peu. Je serais embêtée pour faire l'équation.

- On pourrait faire un espèce de tableau. Les valeurs de x d'un côté, le calcul, les valeurs de y. On va voir si on est capable de tirer une formule à partir de cela. Pour x = 0.

- y vaut 1000.

- *Pour x = 1.*

- y vaut 980.

- *On pourrait écrire le calcul.*

- 1000 x 0,02.

- *Ce n'est pas tout à fait cela. Ce serait 1000 - 1000 x 0,02.*
Pour x = 2.?

- Tu pourrais faire à la 2. Il me semble qu'on avait vu quelque chose de ce genre. Claudine faisait comme cela. Elle avait plusieurs fois le multiple.

- *Ah, il faudrait bien que je trouve un multiple.*

- Je ne sais pas si c'est exprimé sous forme de multiple. Dans un problème, on disait qu'il avait la commission des autos vendues. On avait fonctionné comme cela.

- *Est-ce qu'on essaie d'écrire cela sous forme de multiplication? On a 1000 - 1000 x 0,02.*

- Ca veut dire pour x = 2, on a 1000 - ça à la 2.

- *Regarde, j'aimerais que tu exprimes le calcul pour x = 1 sous forme d'un produit de deux facteurs.*

- Non.

- *O.K. Une autre façon de faire les choses. Voilà le résultat. C'est 1000 multiplié par quelque chose.*

- C'est 1000 multiplié par 0,02 soustrait de 1000.

- *La question est : 980 serait le produit de 1000 par un autre nombre.*

- Non

- *Ecris l'équation 980 = 1000 x z. Es-tu capable de calculer z?*

- Bien je l'isole. z = 980/1000

- *Ca fait combien?*

- 98/100 x 0,98 est z. Ca veut dire la diminution est de 0,98 après 0,96, 0,94.

- *O.K. On est en train de s'égarer. On passe à la troisième question. Quel phénomène met en évidence cette formule?*

- Je dirais que le nombre d'opérations à la minute dépend de l'âge.

- *Quelles sont les deux quantités variables liées par cette formule?*

- L'âge et le nombre d'opérations.

- *Le couple (10, 817) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert. Explique comment et pourquoi.*

- Bien si on avait trouvé l'équation, on aurait pu remplacer dans l'équation et voir si en mettant la valeur x, on a 817 pour la valeur y. On aurait pu dire si ça marche ou pas.

- O.K. Si ça marchait, qu'est-ce que tu dirais?

- Ca voudrait dire qu'à 30 ans, car la donnée est de 10 et on fait 20 + 10, les capacités intellectuelles sont de 817 opérations à la minute.

- O.K. Si ça ne marchait pas, que pourrais-tu dire?

- Je ne sais pas. Je suis embêtée. Je ne pourrais pas dire pourquoi ça ne marche pas.

- Comment découvrirait-on que ça ne marche pas?

- Bien c'est dans l'équation. Si tu remplaces x par 10 et tu n'arrives pas à 817.

- Si tu obtiens 700.

- Bien ça ne marche pas. Les capacités intellectuelles ne sont pas de 817 à la minute. Elles sont de 700.

- En général, comment sont tous les couples qui décrivent la capacité intellectuelle d'Albert?

- Tu peux voir plus global. Tu peux faire 10, 20, 30. La différence est plus grande. Tu peux arriver plus vite à l'âge où il n'est plus capable de faire des opérations à la minute.

- Merci.

Christiane

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. À 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données? Prends le temps de regarder ça.

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute diminuent de 2% à partir de l'âge de 20 ans. A 20 ans, il pouvait faire 1000 opérations. Le temps 0, c'est à partir de 20 ans. Tu peux calculer combien d'opérations par minute il peut effectuer selon l'âge.

- Peut-on établir une formule à partir de ce contexte?

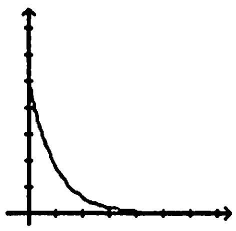
- Oui. Je fais 1 - 2% exposant le temps. je dirais $1000(1 - 0{,}02)^t$.

- C'est beau. C'est venu comme cela?

- Premièrement, tu sais à 0, il en fait 1000. Puis il diminue de 2%. C'est 2/100 x 1000. Puis 1. Comment l'expliquer!

- D'accord, c'est beau. Quel phénomène met en évidence cette formule?

- A partir de 20 ans, il augmente en âge et ça diminue.



- *Comment peux-tu l'exprimer?*

- Une exponentielle.... pas négative... pas inverse. Un peu des deux. Comment dire? En tout cas, le a est plus petit que 0. Tu sais. C'est pas ça non plus.

- *La base.?*

- La base plus petite que 0, je ne suis pas sûre. 1- 0,02 = 0.98, c'est la base.

- *Veux-tu dire que la base est plus petite que 1?*

- Oui plus petit que 1. Pourquoi j'ai dit 0. C'est ça. Plus grand que 1, c'est croissant. Plus petit que 1, c'est décroissant. C'est ça que je cherchais. Donc décroissant.

- *Quelles sont les deux quantités variables liées par cette formule?*

- Le temps ce n'est pas une quantité. En tout cas. Je dirais le temps.

- *Le temps est mesuré comment?*

- En années. C'est son âge dans le fond. Il y a 2 quantités. La quantité d'opérations.

- *Le couple (10, 817) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique comment et pourquoi.*

- Le couple (10, 817). Bon ça va être de plus en plus difficile, 10 représente des années puis 817 la quantité d'opérations à la minute.

- *Décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert?*

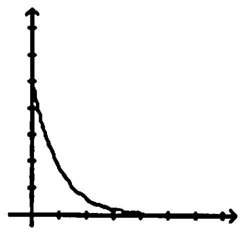
- Si on remplace t par 10, ça va donner 817. Est-ce que je peux calculer cela?... Bon ça donne la réponse. Donc on peut dire oui. Ça représente la capacité intellectuelle d'Albert, mais expliquer comment et pourquoi? Je ne sais pas.

- *Le couple (20, 700) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique comment et pourquoi.*

- Ça ne marche pas. Donc la réponse est non.

- *Comment sont tous les couples qui décrivent les capacités intellectuelles d'Albert?*

Ils sont représentés par



Christophe

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. À 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données?

- C'est un calcul de fonction exponentielle ab^x.

- Veux-tu écrire la formule?

- x c'est la réponse dépendante. ab^x est une fonction exponentielle.

- Peut-on établir une formule à partir de ce contexte?

- Une formule? Je ne sais pas.

- Quel phénomène met en évidence cette formule?

- Quel phénomène? Tu veux dire la capacité intellectuelle qui a une dépréciation de 2?. Chaque année elle diminue de 2%. Le phénomène doit être f(x). Plus l'âge augmente, plus le nombre d'opérations sera petit.

- Quelles sont les deux quantités variables liées par cette formule?

- C'est l'âge puis les années. A chaque année, il y a une réponse.

- Explique-moi ce que tu appelles la réponse.

- Bien, à la 3, ça va donner tant. Quatre années après, ça va donner tant.

- Le couple (19, 817) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique-moi comment et pourquoi.

- Tu prends le 10. Ca veut dire 10 années à partir de 20 ans. Là il a 30 ans. Le 817, donc la réponse que tu mets 10^x ça donne 817. Ca veut dire qu'il va faire 817 opérations à la minutes.

- Le couple (20, 700) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique-moi comment et pourquoi.

- C'est la même chose. 20 années écoulées, il va avoir 700. Sa capacité intellectuelle va être de 700 opérations à la minute.

- *Et pour le couple (20, 600)*

- Il faudrait le calculer.

- *Qu'est-ce que tu fais comme calcul?*

- a c'est l'ordonnée à l'origine. La dépréciation 100% - 2%, ça fait 98. Un pourcentage de 98. Ca fait $0,98^x$.

- *Que comptes-tu?*

- Tu mets 20 pour le x.

- *Est-ce que ça va donner 700?*

- Je ne sais pas. (*...calcul*) Ca ne donne pas 700. C'est bien loin de ça.

- *Est-ce que ce serait mieux avec 600?*

- Avec 600?

- *Non (20, 600) au lieu de (20, 700)?*

- Non je me suis trompé. A 20 ans, c'est 1000. Je refais le calcul. Ca ne donne pas 600.

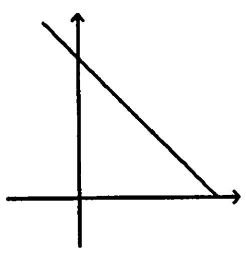
- *Si je reviens à la question 5, quel est ton avis?*

- Ca marche.

- *Comment sont tous les couples qui décrivent les capacités intellectuelles d'Albert?*

- Comment sont tous les couples? Sur un graphique, ils sont négatifs.

- *Que dessinerais-tu?*
- Ca va descendre et ça va arrêter à 0 car ça ne peut pas aller dans les moins.



Francis

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. A 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données.?

- C'est un modèle exponentiel.

- Comment peux-tu décrire ce phénomène?

- Bien, premièrement x, l'exposant serait le nombre d'années. Ab^{x}. Ah oui! x serait le nombre de minutes. b serait la diminution. Je veux dire 98%. Ce serait $1000\ (0{,}98)^{x}$.

- Qu'est-ce que tu obtiens avec ce calcul?

- La capacité intellectuelle. C'est ça; 1000 opérations avec x les années.

- Les années?

- Oui le nombre d'années écoulées à partir de 20 ans.

- A 21 ans, qu'auras-tu calculé?

- Ça ne se calcule pas une capacité intellectuelle.

- Oui mais on propose de calculer le nombre d'opérations faites à chaque minute. Qu'est-ce qu'on obtient?

- 980.

- Qu'est-ce que signifie 980?

- C'est le nombre d'opérations à la minute.

- Quel phénomène est mis en évidence par cette formule?

- Que veux-tu dire?

- Que se passe-t-il pour les capacités intellectuelles d'Albert?

- Bien, elles diminuent de 2% par année. Plus le nombre d'années augmente, plus le nombre d'opérations diminue.

- Le couple (10, 817) décrit-il les capacités d'Albert?

- Tu peux mettre 10 dans la formule. Je le calcule. 817×10^{21}.

- Quel était le nombre d'opérations au départ?

- 1000.

- 1021, est-ce plus grand ou plus petit que 1000?

- C'est plus petit. Non c'est plus grand.

- Et tantôt, tu disais que ça diminuait. Est-ce que ce couple décrit les capacités intellectuelles?

- Oui, peut-être que durant la vingtaine, ça diminue et ensuite, ça remonte.

- *Vérifions pour dix ans plus tard. Est-ce que le couple (20, 700) décrit les capacités intellectuelles?*

- Ce n'est pas encore bon. C'est peut-être la formule qui n'est pas bonne. Ça m'embête. Je reprends 1000 x 0,98x.

- *J'observe que tu as écrit 0,98 et tu travailles avec 98.*

- J'obtiens 667. Ça se ressemble un peu plus.

- *Veux-tu reprendre avec le couple (10, 817)?*

- O.K. Ça marche.

- *Comment sont tous les couples qui décrivent les capacités intellectuelles?*

- Plus le nombre d'heures augmente, plus ça diminue. Plus l'âge d'Albert augmente, plus les capacités intellectuelles diminuent. Les premières années, ça diminue beaucoup, vers la fin, ça diminue moins.

- *Merci.*

Éliane

- *Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. À 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données?*

- Je pourrais calculer le nombre d'opérations à la minute à partir de 20 ans à chaque année.

- *Veux-tu en faire un?*

- Je pensais que c'était la prochaine question. Je dirais que c'est le 1000 opérations à la minute. Je le multiplie par (1 - 0,02) parce que c'est 2% et que ça diminue. A la t, t voudrait dire à partir de 20 ans.

- *Peut-on établir une formule à partir de ce contexte?*

- f(t) voudrait dire le nombre d'opérations à la minute après t années. $f(t) = 1000\ (1 - 0{,}02)^t$.

- *Quel phénomène met en évidence cette formule?*

- Elle met en évidence le phénomène : comment il fait d'opérations à la minute après t années.

- *Quelles sont les deux quantités variables liées par cette formule?*

- L'âge d'Albert et les opérations à la minute.

- *Le couple (10, 817) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert?*

- Avec ce que j'ai dit. Cela fait $(0{,}98)^{10}$ fois 100. 817 veut dire les opérations à la minute. Oui c'est bon.

- *Le couple (20, 700) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert?*

- Bon celui-là. Ce n'est pas la bonne réponse. Ca me donne 667. Je fais la même chose qu'en haut.

- Comment sont tous les couples qui décrivent les capacités intellectuelles d'Albert?

- C'est une fonction exponentielle. Elle est décroissante car elle diminue à chaque année.

- Merci.

Marc

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. À 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données?

- Bien les capacités intellectuelles d'un humain qui se trouvait par le nombre d'opérations à la minute. Ca c'est un calcul qu'on peut faire. Diminution de 2% par année à partir de 20 ans. A 20 ans, Albert peut faire 1000 opérations à la minute. Puis ça diminue de 2% chaque année à partir de 20 ans.

- Peut-on établir une formule à partir de ce contexte?

- Oui. C'est $(1 - 0{,}02)^t$ à partir de 1000. Est-ce que je peux prendre ma calculatrice?

- Oui, j'aimerais que tu parles en même temps que tu fais tes calculs.

- Oui. Je vais faire 1000 - 2%. Ca veut dire 2 x 1000/100 donne 20. Donc 1000- 20 = 20. Ca veut dire qu'il va en perdre 20 par année. A 20 ans il en a 100. A 19 ans, il va en avoir 980. Tu vas descendre de 20 années jusqu'à 0. Tu vas chercher le nombre d'années.

- Alors $(1 - 0{,}02)^x$.

- Oui quelque chose comme cela. Ça veut dire un nombre d'années 0,98. Je ne vois pas autre chose.

- Quel phénomène met en évidence cette formule?

- Ça ne me dit rien. Quel phénomène? Il n'y a pas de phénomène là-dedans. C'est un problème comme un autre.

- Quelles sont les deux quantités variables liées par cette formule?

- Il y a 2 quantités, le nombre d'opérations par minute et le nombre d'années.

- Le couple (10, 817) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique-moi comment et pourquoi.

- Le couple (10, 817). J'imagine que mettre 10 pour après 10 ans puis ça va donner 817 comme opérations à la minute. Il faut l'essayer.

- Essaie-le.

- Oui mais comment le faire? Ce n'est pas pareil. Tu vas faire 1000 - 817 = 83. Ça veut dire qu'on a perdu 83 à 1000. Il faut que tu cherches 2%. D'après-moi, ça ne peut pas arriver à 83 parce que tout à l'heure ça faisait des bonds de 20. Peut-être que tantôt je ne l'avais pas bon. Mais ça ne serait peut-être pas une année complète. Peut-être un an et quelques mois. Je mettrais plutôt, après 1 an, 980, après 2 ans, 960, après 9 ans et 3 mois, 817 environ.

- Le couple (20; 700) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique-moi comment et pourquoi.

- Pour le couple (20, 700), ça peut arriver avec 5,10,15, 15 x 20 = 300. Ça va donner 15 ans. 1000 - 300 = 700.

- Comment sont tous les couples qui décrivent les capacités intellectuelles d'Albert?

- Je ne sais pas.

- Merci.

Nadine

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. À 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données?

- Tu veux dire comment on va faire pour trouver à 20 ans les 1000 opérations par minute.

- Est-ce qu'on peut savoir après 20 ans?

- Ça doit.

- Comment?

- Bien tu calcules. Ici, elle diminue de 2% à partir de l'âge de 20 ans. Il peut faire 1000 opérations à la minute. A 21 ans, il va diminuer de 2%.

- Que vas-tu obtenir?

- Voyons, 1000 opérations moins 2%. A 20 ans, il fait 1000. A 21 ans, il fait 1000 - 2%.

- Veux-tu une calculatrice?

- Je ne suis pas bonne en calcul mental.

- Et puis?

- Je ne sais pas, ça va donner un chiffre.

- Peut-on établir une formule à partir de ce contexte?

- Oui.

- Laquelle?

- Tantôt, on disait 1000 - 2% pour une année. Pour deux années, ce serait 1000 - b^x.

- Quel phénomène met en évidence cette formule?

- Qu'est-ce que tu veux dire quel phénomène?

- Quel modèle?

- C'est un modèle exponentiel.

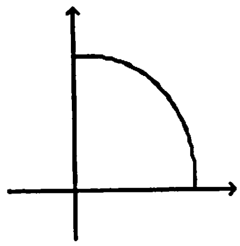
- Pourquoi?

- Car on a a - b^x. Et elle va décroître

- Veux-tu tracer l'allure du graphe?

c

- Oui.
Ca part d'un point et ça diminue à chaque année. Je ne sais pas.



Ça part d'un point et ça diminue à chaque année. Je ne sais pas.

- Quelles sont les deux quantités variables liées par cette formule?

- Les deux quantités variables x et y.

- Que représente a?

- a c'est 1000.

- et b?

- b c'est le 2%.

- Le couple (10, 817), décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique-moi comment et pourquoi.

- Il faut que je calcule, je suppose?

- Oui.

- 10 ça fait 1024. Ça ne marche pas. Ça pourrait peut-être donner cela. Là ça me donnerait un négatif.

- Le couple (20, 700) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert?. Explique-moi comment et pourquoi.

- Tantôt à 10, ça donnait 1024. Donc 1000 - 1024, ça me donnait -24. Je ne sais pas compter.

- Comment sont tous les couples qui décrivent les capacités intellectuelles d'Albert?

- Je ne sais pas.

- Merci.

Nicole

- Les capacités intellectuelles d'un humain, exprimées par le nombre d'opérations par minute qu'il peut faire, diminuent de 2% par an à partir de l'âge de 20 ans. À 20 ans, Albert pouvait faire 1000 opérations à la minute. Quel(s) calcul(s) peut-on faire à partir de ces données?

- Bien je comprends qu'il faudrait que je trouve quel genre de calcul faire à partir des données qu'ils me donnent. Ca veut dire que je sais qu'à 20 ans, Albert fait 1000 opérations à la minute. Plus son âge avance, plus que sa capacité va diminuer. Disons qu'à 20 ans, c'est l'âge 0. À 21 ans, il fait 1000 - 2%. À 22 ans, il est rendu à 1000 - 2% - 2%. Ca veut dire une fonction exponentielle. Je vais pouvoir trouver à chaque année sa capacité intellectuelle.

- Peut-on établir une formule à partir de ce contexte?

- On peut faire une formule. Une diminution de 2% par année. A 21 ans, je peux dire qu'il va être à 98% de sa capacité. Disons que ça varie en fonction de lâge. Bien je dis une fonction exponentielle ab^x. A 20 ans, j'ai 1000. Je dois isoler b. b c'est à toutes les années, ça va être 0,98. Ma fonction serait $1000(0{,}98)^x$.

- Quel phénomène met en évidence cette formule?

- Au bout d'une année, au bout de deux ans, je peux trouver des réponses. Je vais voir à combien est rendue sa capacité intélectuelle à tous les ans. Quel phénomène met en évidence c'est sa capacité intellectuelle à chaque année.

- Quelles sont les deux quantités variables liées par cette formule?

- Quantité variable. Je vais avoir mon nombre d'années qui est x. Il va varier. Je peux dire dans 5 ans, 10 ans, 20 ans. Il y a ma réponse qui va varier. Parce que dépendamment du nombre d'années, sa capacité intellectuelle va changer. 1000 et 98 sont constantes.

- Le couple (10, 817) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique-moi comment et pourquoi.

- Oui, x vaut 10, 817 serait y. Dans 10 ans, ses capacités seraient de 817.

- Le couple (20, 700) décrit-il les capacités intellectuelles d'Albert? Explique-moi comment et pourquoi.

- Encole là, 20 serait le nombre d'années. À 40 ans. Puis 700, c'est le 1000 qui diminue de 2% à chaque année.

- Comment sont tous les couples qui décrivent les capacités intellectuelles d'Albert?

- La première valeur du couple, c'est toujours les années. La deuxième valeur c'est toujours sa capacité intellectuelle. C'est toujours comme cela. On n'aura jamais le contraire.

- Merci.

Variable et Fonction:

influence de la modélisation et
de la programmation fonctionnelle

1532-03